



Heitor Miguel Prata e Matos

Mestre em História e Filosofia das Ciências

A Matemática e a Narrativa

Reflexos de Afinidades Históricas e Epistemológicas: Uma Conceptualização Pedagógica da Matemática

Dissertação para obtenção do Grau de Doutor em História, Filosofia
e Património da Ciência e da Tecnologia

Orientador: Prof. Dr. Christopher Damien Aurette
Professor Auxiliar do Departamento de Ciências Sociais Aplicadas da
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.

Co-orientador: Prof. Dr. António Manuel Nunes dos Santos
Professor Catedrático do Departamento de Ciências Sociais Aplicadas da
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.

Arguente: Prof. Dr. Jaime Carvalho e Silva
Professor Associado do Departamento de Matemática da Faculdade de
Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

Arguente: Prof^a. Dra. Susana Paula Graça Carreira
Professora Associada do Departamento de Matemática da Faculdade de
Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve.

Vogal: Prof. Dr. Manuel Leote Inglês Esquível
Professor Associado do Departamento de Matemática da Faculdade de
Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.

Vogal: Prof^a. Ana Maria Dias Roque de Lemos Boavida.
Professora Adjunta da Escola Superior de Educação do Instituto
Politécnico de Setúbal.

Vogal: Prof. Dr. António Manuel Dias Domingos
Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Faculdade de
Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.

Vogal: Prof^a. Dra. Maria Teresa Oliveira
Professora Auxiliar Aposentada do Instituto de Educação da Universidade
de Lisboa..



Março 2015



A Matemática e a Narrativa – Reflexos de Afinidades Históricas e
Epistemológicas: Uma Conceptualização Pedagógica da Matemática

Heitor Miguel Matos

2015

(Tipo de letra: Arial, 16 pt normal)

Universidade Nova de Lisboa
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Departamento de Ciências Sociais e Humanas

A Matemática e a Narrativa

Reflexos de Afinidades Históricas e Epistemológicas: Uma Conceptualização Pedagógica da Matemática

Heitor Miguel Prata e Matos

**Dissertação apresentada na Faculdade de Ciências e Tecnologia da
Universidade Nova de Lisboa para obtenção do grau de Doutor em
História, Filosofia e Património da Ciência e da Tecnologia.**

Orientador: Professor Doutor Christopher Damien Aurretta

Co-Orientador: Professor Doutor António Manuel Nunes dos Santos

Monte de Caparica

2015

A Matemática e a Narrativa - Reflexos de Afinidades Históricas e Epistemológicas:

Uma Conceptualização Pedagógica da Matemática

Copyright © Heitor Miguel Prata e Matos, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Agradecimentos

Desejo agradecer a todas as pessoas que, directa ou indirectamente, contribuíram para a realização desta Dissertação de Doutoramento, especialmente ao meu orientador, Professor Doutor Christopher Aretta, que sempre acreditou neste projecto, desde a semente da ideia, até à torre de Babel.

Quero destacar ainda o Professor Doutor António Manuel Nunes dos Santos pelas preciosas sugestões, que ajudaram à explicitação de ideias importantes e ao consubstanciar desta Dissertação.

Agradeço também aos membros da Comissão de Acompanhamento, Professor Doutor Manuel Esquível e a Professora Doutora Ana Boavida, pelas suas sugestões e pela honra que me deram ao aceitar o convite que lhes foi endereçado.

Um agradecimento também é devido à Professora Doutora Mariana Gaio Alves pelo auxílio na elaboração do inquérito aplicado aos alunos.

Um segundo agradecimento é devido ao Coordenador do Programa Doutoral em História, Filosofia e Património da Ciência e Tecnologia, o Professor Doutor António Manuel Nunes dos Santos, a quem só podia estar duplamente agradecido, pois foi no conteúdo curricular do mesmo e na sapiência dos seus docentes que encontrei as bases férteis para o florescimento das minhas ideias.

Por último, agradeço à Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, por tudo o que me continua a ensinar.

Em frente, um horizonte sereno para espreguiçar o tempo,
Um mar vazio para afogar dúvidas, angústias e lamento.
Uma concha bela, para partir com o raro metal da ideia,
Até a voz, a pele, a sombra, o mar serem restos de areia.

Para a Cláudia, a Diana e o Miguel,
Os axiomas da minha vida.

Resumo

“...visto deste ponto de vista, a matemática não se constituirá mais como uma linguagem simbólica exacta, suplementada por algumas figuras heurísticas, mas sim como duas linguagens com o mesmo estatuto, uma simbólica e outra icónica.”¹

Esta tese *A Matemática e a Narrativa – Reflexos de Afinidades Históricas e Epistemológicas: Uma Conceptualização Pedagógica da Matemática* trata de questões problemáticas relativamente à transmissão de conceitos em matemática.

Primeiramente, a matemática, uma construção humana tanto na sua concepção como na sua evolução, não se apresenta imediatamente acessível e utilizável pela generalidade dos seres humanos. A sua utilização encontra-se caracteristicamente restrita a quem domine o formalismo simbólico. Relativamente a outras áreas científicas, tem emergido o desejo de comunicar, de forma clara, o conteúdo ideário dos seus respectivos domínios do conhecimento aos não especialistas.

Não obstante tais esforços de comunicação terem vindo a ser concretizados com sucesso em várias áreas, o mesmo tem-se verificado com maior raridade na matemática, dada a dificuldade intrínseca de fornecer expressões rigorosas e simultaneamente acessíveis dos supracitados formalismos simbólicos. Em segundo lugar, os problemas pedagógicos contemporâneos, já patentes na *Gazeta de Matemática*, publicação que acompanhou grande parte do século XX em Portugal, centram-se na dificuldade de atrair os alunos para os desafios com os quais a matemática confronta o engenho humano. Consequentemente, a produção futura de conhecimento pode ressentir-se deste facto. Ao não pactuar com o cepticismo que envolve a tradução das ideias matemáticas para suportes não-formais, contestam-se as premissas dissonantes nas quais se fundamenta. Os modelos teóricos publicados por académicos contemporâneos atestam a pertinência de uma perspectiva inovadora neste domínio. Além disso, foram desenvolvidos instrumentos pedagógicos que melhoram a transmissão de conceitos matemáticos, indicando a importância educativa da narrativa, em particular. Tanto do ponto de vista conceptual, como da prática, o papel essencial do discurso oral (narrativa/conto oral) perante a transmissão do conhecimento matemático é cada vez mais enfatizado.

É proposto, como uma abordagem inovadora à comunicação da matemática, explorar a narratividade para criar um currículo mais dinâmico. A utilização da oralidade torna-se um processo-chave no ensino e na reflexão sobre o conhecimento matemático, dada a natureza híbrida (ultrapassando fronteiras) das práticas intelectuais contemporâneas.

Matemática; Narrativa; Pedagogia; Oralidade; Híbridação.

¹ *Patterns of Change – Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics*, Ladislav Kvasz, Birkhauser, 2008, p.13.

Abstract

“...from this point of view, mathematics will no longer be an exact symbolic language, supplemented by some heuristic figures, but two languages with the same status instead, one of them symbolic and the other iconic.”²

Our thesis, *A Matemática e a Narrativa – Reflexos de Afinidades Históricas e Epistemológicas: Uma Conceptualização Pedagógica da Matemática* [Mathematics and Narrative—Reflections on Their Historical and Epistemological Affinities: a Pedagogical Conceptualization of Mathematics], addresses problematical issues concerning the transmission of concepts in mathematics.

First, mathematics, which is a human construct both in its conception and evolution, is not readily accessible and usable by the generality of human beings. It is characteristically restricted to those who master its symbolic formalism. With regard to other fields of scientific inquiry, there has emerged a desire to communicate clearly and effectively the ideational content of their respective knowledge domains to the non-specialist. Although such efforts at communication have been successfully carried out in several fields, it has more rarely occurred in mathematics given the intrinsic difficulty in giving rigorous albeit accessible expression to the abovementioned symbolic formalisms. Second, the ongoing pedagogical problems addressed in the *Gazeta de Matemática*, a publication active during much of the twentieth century in Portugal, focus on the difficulty in attracting students to the challenges with which mathematics confronts human ingenuity. Consequently, the future production of knowledge risks being hindered. Notwithstanding the skepticism surrounding the translation of mathematical ideas into non-formal contexts, we challenge the unsound premises in which it is based on. Theoretical models published by contemporary scholars attest to the pertinence of an innovatory perspective in this domain. Furthermore, pedagogical instruments have been developed which improve the transmission of mathematical concepts, indicating the educational importance of narrative in particular. Both from the conceptual perspective and that of praxis, the essential role of oral discourse (narrative/storytelling) vis-à-vis the transmission of mathematical knowledge is increasingly emphasized.

Exploring narrative to create a more dynamic curriculum, an innovatory approach to the communication of mathematics is proposed. The use of orality becomes a key process in the teaching of and reflection upon mathematical knowledge given the nature of our contemporary hybridized (boundary-crossing) intellectual practices.

Mathematics; Narrative; Pedagogy; Orality; Hybridization.

² *Patterns of Change –Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics*, Ladislav Kvasz, Birkhauser, 2008, p.13.

Índice de Matérias

Folha de rosto	i
Direitos de cópia	iii
Agradecimentos	v
Dedicatória	vii
Resumo	ix
Abstract	xi
Índice de Matérias.	xiii
Índice de Figuras	xv
Introdução.	1
1. Notas histórico-filosóficas sobre a Matemática	13
1.1. Nota histórico-filosófica sobre a origem da Matemática	13
1.2. Nota histórico-filosófica sobre uma abordagem linguística à construção da matemática	19
2. Epistemologia da matemática e da narrativa	29
2.1 Elementos de epistemologia da matemática	29
2.2 Elementos de epistemologia da narrativa	43
2.3 Pontos de contacto entre matemática e narrativa	50
3. Um percurso histórico e pedagógico	73
3.1 Introdução	73
3.2 Dos relatórios de actividade docente de Maria Teodora Alves e Rómulo de Carvalho	79
3.3 Das questões emergentes do debate da coordenação entre o Ensino Secundário e o Superior	86
3.4 Do ensino da Matemática na Alemanha e em Itália na <i>Gazeta de Matemática</i>	92
3.5 Dos reflexos históricos na contemporaneidade	93
4. Literacia e Oralidade na Matemática	99
4.1 Literacia e Oralidade na Pedagogia da Matemática	99
4.1.1 Nota histórico-filosófica sobre a oralidade	99
4.1.2 Literacia e Numeracia	107
4.2 Aplicações da Oralidade na Matemática	119
4.2.1 Antes de contar uma história	119
4.2.2 Porquê contar uma história	126
4.2.3 Exemplos de narrativas que se interligam com os conceitos matemáticos	127
4.2.4 Aplicação em sala de aula	133
Epílogo	139
Bibliografia	143
Anexo 1	155
Anexo 2	159
Anexo 3	163

Índice de Figuras

Figura 3.1	85
Figura 3.2	91

Introdução

Ao longo do século passado e da primeira década deste século, tem vindo a ser sentida uma crescente necessidade de diversificação da comunicação, fruto da complexificação do conhecimento, dos instrumentos tecnológicos de transmissão da informação e das relações sociais e políticas.

Constitui um exemplo português dessa necessidade – sentida também na Matemática – a *Gazeta de Matemática* que, nas suas duas primeiras séries, tentou difundir e actualizar o conhecimento e a pedagogia da Matemática, resultado da participação de inúmeros académicos. Foram profusos os debates realizados no âmbito desta publicação: as análises realizadas a outros sistemas de ensino – nomeadamente o dinamarquês, o italiano, o alemão e o francês – por José Sebastião e Silva, Hans Jorgen Helms e Emma Castelnuovo; a discussão em torno das causas do insucesso dos alunos nos exames de acesso ao ensino superior, num amplo debate com a participação de Bento de Jesus Caraça, António Augusto Lopes, Hugo Ribeiro, Rómulo de Carvalho, Maria Teodora Alves, Laureano Barros e Fernando Soares David; as sugestões metodológicas no ensino da geometria ou da álgebra, por Maria Teodora Alves, Emma Castelnuovo e José Morgado; a polémica em torno do ensino dos logaritmos, entre Bento de Jesus Caraça e José Sebastião e Silva; a divulgação de trabalhos nacionais e internacionais de investigação matemática; a discussão em torno das escolhas políticas na educação e formação matemáticas, nas suas diferentes vertentes e diversos países, nomeadamente na *Gazeta de Matemática* nº 76/77. No entanto, muitas das soluções apresentadas nesses debates nunca foram implementadas, em grande parte devido às inércias sociais, institucionais e individuais. Hoje temos um mundo que anseia pela participação na construção de uma nova humanidade, o que só será possível com a utilização generalizada de organização e método. Esta constatação tem uma relação íntima com o pensamento de Bento de Jesus Caraça, fundador e participante activo da *Gazeta de Matemática*:

A Matemática é geralmente considerada como uma ciência à parte, desligada da realidade, vivendo na penumbra do gabinete fechado, onde não entram os ruídos do mundo exterior, nem o Sol, nem os clamores dos homens. Isto só em parte é verdadeiro. Sem dúvida a Matemática possui problemas próprios, que não têm ligação imediata com os outros problemas da vida social. Mas não há dúvida, também, que os seus fundamentos mergulham, tanto como os de qualquer ramo de ciência, na vida real, uns e outros entroncam na mesma madre. Mesmo quanto aos problemas próprios, raramente acontece, se eles são de facto daqueles problemas que põem em jogo a sua essência e o seu desenvolvimento, que eles não interessem também, e profundamente, à corrente geral das ideias.¹

¹ *Conceitos Fundamentais da Matemática*, Bento de Jesus Caraça, Livraria Sá da Costa Editora, 1984, pp. XIII-XIV.

A Matemática e as ideias que lhe estão subjacentes constituem um manancial de oportunidades de reformulação e organização da realidade que nos rodeia. Para tal, torna-se essencial a sua compreensão e aplicação nos mais diversos domínios, da ciência à arte. Contudo, o seu confinamento a uma linguagem formal e a uma hierarquia de saberes – que pode ou não ocorrer –, torna-a de difícil acesso, desde o início da vida escolar.

Na tentativa de obviar o problema anterior, Apostolos Doxiadis² tem-se destacado na preocupação com a narratividade associada à Matemática, reclamando essa forma de expressão para as ideias matemáticas:

As anyone who teaches the subject knows well, the appropriate narrative helps make its substance more comprehensible, while the lack of narrative frame may render mathematics indigestible or even, at times, downright incomprehensible.

This dependence of mathematics on narrative is not surprising: after all, mathematics is created by people, and people live, grow, think, and create stories. Stories play crucial roles in our discovering, creating, explaining, and organizing knowledge, and thus mathematics also have great need for narrative, even though its taste for general ideas might make one forget this.³

Anteriormente, também Ian Stewart⁴, Martin Gardner⁵, Miguel de Guzmán⁶ e John Allen Paulos⁷ se dedicaram à composição de obras com esse intuito, mas sem uma clara teorização acerca do assunto:

Innumeracy is much closer in spirit to an extended personal essay than it is to a formal treatise.⁸

² *Logicomix – uma Busca Épica da Verdade*, Gradiva, 2009; *O Tio Petros e a Conjectura de Goldbach*, Publicações Europa-América, 1992.

³ *Circles Disturbed – the Interplay of Mathematics and Narrative*, Apostolos Doxiadis e Barry Mazur (eds.), Princeton University Press, 2012, p. VII.

⁴ *Deus Joga aos Dados?*, Ian Stewart, trad. Armindo Salvador, rev. científica Jorge Buesco, Gradiva, 1991; *The Annotated Flatland – A Romance of Many Dimensions*, Edwin A. Abbott, int. e notas de Ian Stewart, Basic Books, 2002; *Flutterland – O País Ainda Mais Plano*, Ian Stewart, trad. Paulo Ivo Teixeira, Gradiva, 2006; *Os Problemas da Matemática*, Ian Stewart, trad. Miguel Urbano, Editora Gradiva, 1996.

⁵ *The Annotated Alice – The Definitive Edition*, Lewis Carroll, int. e notas de Martin Gardner, W. W. Norton & Company, 2000; *Ah, Apanhei-te*, Martin Gardner, trad. Jorge Lima, Gradiva, 1982.

⁶ *Aventuras Matemáticas*, Miguel de Guzmán, trad. João Filipe Queiró, Gradiva, 1990; *Contos com Contas*, Miguel de Guzmán, trad. Jaime Carvalho e Silva, Gradiva, 1991.

⁷ *Mathematics and Humor*, John Allen Paulos, University of Chicago Press, 1980; *Innumeracy – Mathematical Illiteracy and its Consequences*, John Allen Paulos, Hill and Wang, 1989; *Beyond Numeracy*, John Allen Paulos, Vintage Books, 1991; *Once Upon a Number – the Hidden Mathematical Logic of Stories*, John Allen Paulos, Basic Books, 1998.

⁸ *Innumeracy – Mathematical Illiteracy and its Consequences*, John Allen Paulos, Hill and Wang, 1989, p.xvi.

Já em meados do século passado, no Brasil, o matemático Júlio César de Mello e Souza⁹, através do seu heterônimo Malba Tahan, terá iniciado essa demanda, comunicando conceitos matemáticos e suas aplicações através de livros de contos. Essas obras inspiradoras constituem um legado importante, que deve ser reintroduzido na pedagogia e divulgação do conhecimento matemático. A dominante instituição da *Matemática Moderna* como matriz do ensino da Matemática, sob influência de Bourbaki, impediu uma maior atenção e estudo dessas ideias e obras vanguardistas e a sua implementação na prática pedagógica.

As razões que se vislumbram actualmente para esta preocupação, relativamente à comunicação do conhecimento matemático, surgem de vários quadrantes. Por um lado, Michael Schiro¹⁰ conclui, ao nível da pedagogia, que a crescente multiculturalidade nas escolas obriga a uma multiplicidade comunicacional, nomeadamente com a introdução do conto oral – no que é secundado por vários grupos que se dedicam à investigação da utilização pedagógica do conto no ensino da Matemática, como o *Imaginative Education Research Group* (I.E.R.G.), associado à Universidade de Simon Fraser, em Vancouver, ao qual pertence, por exemplo, Rina Zazkis¹¹.

Por outro lado, Ladislav Kvasz¹² analisa a formação histórica da Matemática, do ponto de vista linguístico, observando que foram de fundamental importância, na evolução do conhecimento matemático, as linguagens icónicas não formais, o que mostra que muitas vezes o conhecimento matemático não evolui nas suas redes formais, mas com influências não formais, o que é demonstrado por Kvasz:

Frege separated arithmetic from geometry and connected the different phases in the “development of arithmetic” only loosely, using phrases as “then they went on”, “the next higher level”, or “the next step forward”. But the question why “they went on” or where “the next higher level” came from remained unanswered. [...] It turns out that in these transitions a remarkable tie between the symbolic and the iconic

⁹ Nota 324.

¹⁰ *Oral Storytelling and Teaching Mathematics – Pedagogical and Multicultural Perspectives*, Sage Publications, 2004; *Curriculum Theory - Conflicting Visions and Enduring Concerns*, Sage Publications, 2008.

¹¹ *Lesson Play in Mathematics Education: A tool for research and professional development*, Rina Zazkis, Natalie Sinclair, Peter Liljedahl, Springer, 2013; *Teaching mathematics as storytelling*, Rina Zazkis, Peter Liljedahl, Sense publishers, 2009; *Learning Through Teaching Mathematics*, Rina Zazkis, Roza Leikin, Springer, 2010.

¹² Matemático, doutorado em Filosofia e professor em educação matemática. Inicialmente pensou em seguir uma carreira em matemática aplicada, realizando investigação em astrofísica em Moscovo. Após o desmembramento da União Soviética, os seus interesses mudaram, tendo obtido diversas bolsas prestigiadas para desenvolver investigação em filosofia da matemática nos principais centros desta área do conhecimento, nomeadamente Viena, Londres, Berkeley e Berlim, entre 1993 e 2002.

languages appears. The transition to “the next higher level” in development of the symbolic language happens by means of an iconic intermediate level.¹³

Este jogo de linguagens também é abordado por Jean-François Lyotard, na sua análise à condição pós-moderna¹⁴.

Poder-se-ia argumentar que, pelo contrário, é na construção de uma narrativa que reside o principal problema, na medida em que não se molda às necessidades do conhecimento matemático. Mais uma vez se demonstra que não constitui um obstáculo intransponível, à luz dos estruturalistas como Propp¹⁵, de académicos como Umberto Eco¹⁶ e Roland Barthes¹⁷, ou de escritores como Jorge Luís Borges¹⁸, Raymond Queneau¹⁹ ou Italo Calvino²⁰.

Resulta ainda da experiência pedagógica, adquirida ao longo de mais de dez anos de docência, aquele que constitui o fundamento mais profundo para esta tese. Por um lado, a evidente necessidade, dado o aumento exponencial do conhecimento humano, de uma cooperação entre as diferentes disciplinas, baseada em comunicação externa ao seu próprio contexto, como tem sido estudado por académicos como Peter Galison²¹. Por outro lado, a função essencial da oralidade na aprendizagem obriga a repensar a comunicação matemática através do uso exclusivo da sua linguagem privada, problema reflectido na obra de Walter Ong²², de Ludwig Wittgenstein²³ e de Paul Ricoeur²⁴.

¹³ *Patterns of Change – Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics*, Ladislav Kvasz, Birkhauser, 2008, p. 85.

¹⁴ *A Condição Pós-Moderna*, trad. José Navarro, Lisboa, Editora Gradiva, 2003.

¹⁵ *A Morfologia do Conto*, trad. Jaime Ferreira e Vítor Oliveira, Vega Editora, 2003.

¹⁶ *Leitura do Texto Literário*, trad. Mário Brito, Editorial Presença, 1993; *Obra Aberta*, trad. João Rodrigo Narciso Furtado, Editorial Presença, 1989; *O Signo*, trad. Maria de Fátima Marinho, Editorial Presença, 1997.

¹⁷ *O Prazer do Texto*, trad. Maria Margarida Barahona, Edições 70, 1997; *O Rumor da Língua*, trad. António Gonçalves, Edições 70, 1987.

¹⁸ *Borges e a Matemática*, Guillermo Martinez, trad. Miguel Serras Pereira, Ambar, 2003; *The Unimaginable Mathematics of Borges' Library of Babel*, William Goldbloom Bloch, Oxford University Press, 2008; *Ficções*, trad. José Colaço Barreiros, Teorema, 1998.

¹⁹ *Cent Mille Millions de Poèmes*, Gallimard, 1961; *Exercícios de Estilo*, trad. Helena Agarez Medeiros, Edições Colibri, 2000.

²⁰ *Novas Cósmicas*, Editorial Teorema, 1995; *O Castelo dos Destinos Cruzados*, trad. José Colaço Barreiros, Editorial Teorema, 2003; *Sobre o Conto de Fadas*, trad. José Colaço Barreiros, Editorial Teorema, 1999; *Seis Propostas Para o Próximo Milénio*, trad. José Colaço Barreiros, Editorial Teorema, 1998.

²¹ “Computer Simulations and the Trading Zone”, Peter Galison, *The Disunity of Science - Boundaries, Contexts, and Power*, Ed. Peter Galison e David J. Stump, Stanford University Press, 1996.

²² *Orality and Literacy: The Technologizing of the World*, New Accents, 1982.

De um ponto de vista mais concreto, no primeiro capítulo, *Notas histórico-filosóficas sobre a Matemática*, procura-se estabelecer um conjunto de factos pertinentes, primeiramente sobre a relação entre a matemática e o ser humano. Neste contexto, pode-se observar que a experiência matemática não se constitui como algo exterior ao indivíduo, faz parte da experiência humana, isto apesar da percepção da natureza universal do conhecimento matemático, noção generalizada na sociedade, fruto de um percurso histórico-cultural. Essa natureza universal alimenta-se, diametralmente, do desejo constante de superação do próprio Homem.

Por outro lado, a perspectiva histórica inicial, que os homens possuíam da matemática, baseada na imutabilidade e na justificação baseada numa autoridade pré-estabelecida, transformou-se numa perspectiva de progresso (com o Iluminismo) e de genialidade criativa (com o Romantismo) mantendo, no entanto, o distanciamento relativamente à personalidade do autor. Posteriormente, fruto de aceso debate filosófico, alguns autores começaram a considerar que o desenvolvimento da matemática pode suscitar a apropriação de novas expressões por parte da sua estrutura lógica, quando se pressupõe uma historicidade linguística do conhecimento matemático – tal como Hintikka²⁵ e Friedman²⁶ defendem, em particular relativamente à importância das figuras geométricas na construção lógica da geometria:

(Kant)...only through the union of the two faculties, sensibility and understanding, can human cognition arise. Moreover, not only is such a union necessary for knowledge, it is also necessary for our representations to have objective meaning or content.²⁷

(Hintikka) the processes by means of which we come to know the existence of individuals is that of searching for them. [...] ...the structure of a logical argument is due to the structure of processes of searching for and finding.²⁸

²³ *Philosophical Investigations*, trad. G. E. M. Anscombe, Basil Blackwell (ed.), 1953.

²⁴ *Teoria da Interpretação – O Discurso e o Excesso de Significação*, trad. Artur Morão, Lisboa, Edições 70, 1976.

²⁵ “Kant's Theory of Mathematics Revisited”, *Philosophical Topics* 12 (2), 1981, pp. 201-215; “Kant's Transcendental Method and His Theory of Mathematics”, *Topoi* 3 (2), 1984, pp. 99-108.

²⁶ “Kant on Geometry and Spatial Intuition”, *Synthese* 186 (1), 2012, pp. 231-255; “Kant's Theory of Geometry”, *Philosophical Review* 94 (4), 1985, pp. 455-506.

²⁷ “Kant on Concepts and Intuitions in the Mathematical Sciences”, Michael Friedman, *Synthese*, Vol. 84, No. 2, The Philosophy of Mathematics, Part I, Springer, 1990, p. 213.

²⁸ “Kant on the Mathematical Method”, *The Monist*, Vol. 51, No. 3, Kant Today: Part I, Oxford University Press, 1967, pp. 372-375.

Explicita-se, então, que a paridade pode ser atribuída a esses auxiliares da construção da estrutura lógica, relativamente às próprias estruturas lógicas, transformando alguns desses auxiliares, tidos como auxiliares psicológicos, em parte integrante do edifício matemático. Aliás, como se constata no desenvolvimento deste capítulo, as inovações linguísticas estão intimamente ligadas às descobertas fundamentais da matemática, permitindo expressar conexões até esse momento irreproduzíveis. Tal como demonstra Ladislav Kvaz, a matemática possui a capacidade de se reinventar através de linguagens icónicas, que permitem a ligação entre antigos e novos contextos linguísticos. Desta forma, a historicidade linguística da matemática resulta da seguinte duplicidade: as ideias nascem das experiências individuais e as linguagens específicas retiram-lhes os elementos não comuns; as ideias originais resultam de experiências individuais produzidas com a junção de elementos não previstos à linguagem específica. Constitui uma consequência desta dinâmica a possibilidade de adicionar elementos a essas linguagens específicas, de forma a criar experiências pedagógicas individuais que suscitem a interiorização de determinadas ideias matemáticas.

No início do segundo capítulo, *Epistemologia da Matemática e da Narrativa*, traça-se um percurso histórico da formalização da matemática – da sua axiomatização e lógica –, concluindo-se que a formalização só surgiu após a acção humana na resolução de problemas.

De seguida, distingue-se entre os problemas internos da matemática formal, e os problemas de modelação matemática, resultantes da extensa coincidência entre o mundo inventado pelos matemáticos e a realidade. Dessa extensa coincidência terá surgido a forma positivista (lógica) como o conhecimento matemático foi sendo encarado até à segunda metade do século passado. Então, surgiu a hipótese de a matemática ser resultado de uma originalidade primária, com critérios de escolha subjectivos sendo, por isso, muito mais uma arte do que uma ciência – podendo inclusive ocorrer fora dos contextos considerados válidos até esse momento.

Mostra-se, então, algumas das relações históricas entre os princípios matemáticos e o mundo físico, para se compreender que a percepção do mundo externo ocorre no indivíduo, independentemente de se acreditar ou não num universo externo objectivo. Este facto suscita o interesse de, ao invés de dedicar o ensino à aprendizagem enciclopédica de fenómenos pontuais ou insuficientemente contextualizados, dar a possibilidade ao aluno de compreender, com maior profundidade, os princípios e conceitos inerentes aos pequenos exemplos que vai encontrando ao longo da sua vida académica e pessoal. Constitui um desafio fundamental dotar os alunos dessa percepção distinta da realidade (como se de visão ou audição se tratasse) que se chama consciência matemática, que acontece nos pequenos e grandes momentos de descoberta, capacidade individual e única, que até os maiores vultos da matemática tentaram descrever.

Apesar da máquina de formalização – que vai ocultando esses instantes de consciência matemática –, conclui-se que a matemática não é o formalismo ou as “estruturas naturais” que lhe

estão subjacentes, mas as interrogações que surgem constantemente e os esforços, formais e informais, para responder a essas interrogações, possibilitando a descoberta e compreensão de antigas e novas “estruturas naturais”. Nesse caminho, torna-se essencial a escolha feliz do compromisso entre formalismo e expressões não formais – efeitos da contaminação dos homens pelo mundo que os rodeia –, cumprindo o escrupuloso rigor matemático, mas também a necessidade de ser compreendido.

Tendo em conta que a escolha estética constitui algo indissociável da arte – e, como já vimos, essa pode ser uma característica da matemática –, de facto o fenómeno estético só ocorre quando se estabelece uma relação entre o objecto artístico e o ser humano. Coloca-se então a questão de saber de que forma pode ser suscitada essa relação entre matemática e homens.

Pensar leva a generalizar, mas essa generalização depende da temporalidade da linguagem. Esta constatação leva ao surgimento de diferentes formas de narratividade e ao emergir de uma multiplicidade de textos, em torno de diferentes ideias ou conceitos, que foram inicialmente pensados. Admite-se que provavelmente será inútil procurar uma linguagem ideal, uma vez que as linguagens que acompanham a humanidade estão em constante mutação. Sendo assim, ao surgir um problema, num contexto não matemático, procura-se a construção de um modelo formal que se adequa, sem que se exclua a inovação linguística. A partir da manipulação desse modelo, utilizam-se os resultados obtidos e testa-se a sua utilidade no problema original. Este processo de modelação matemática pode constituir um auxiliar à construção de novas narrativas de ideias ou conceitos matemáticos. De facto, partindo da narrativa formal original, pode-se construir uma narrativa modelo que, através da manipulação das suas formas e constituintes – mantendo a possibilidade da interpretação pretendida pelo autor por parte dos destinatários –, apresente alternativas substancialmente rigorosas à narrativa formal convencional.

Apesar de muitos destes modelos serem vistos como genéricos, com propriedades que lhes são transversais, constitui factor apriorístico fundamental a percepção da influência de outras questões (temporais, emocionais, etc.) na sua aplicação, bem como a forma como determinam a experiência individual.

Por outro lado, a conceptualização por detrás da construção narrativa (sustentada na comparação, imaginação, ajustamento focal, etc.) concretiza-se em múltiplas formas expressivas. Mais do que isso, do confronto de diferentes concepções obtém-se a conceptualização mais conforme aos objectivos das narrativas por ela geradas. Esse confronto pode até ser resolvido por importação de modelos de outros domínios. Essas modelizações devem estar de acordo com as características inerentes ao que se quer transmitir, podendo assumir uma forma hierarquizante, probabilística, binária ou determinística, assim como suscitar processos de inferência e não basear-se em interpretações adquiridas. Um elemento fundamental, para que isso ocorra, constitui o centrar da pesquisa das

formulações narrativas no questionamento constante dos seus limites e possibilidades, relativamente ao fim a que se destinam.

De seguida enfatiza-se que, enquanto a narrativa constitui uma expressão individual, a matemática surge de tentativas individuais de resolução de problemas (que podem implicar novas perspectivas ou criações linguísticas). Sendo um evento temporal, as diversas narrativas consubstanciam-se numa sucessão de acontecimentos que, à luz da interpretação individual, pode suscitar novas narrativas. O matemático procura a resolução do problema que melhor se relacione com o momento linguístico histórico da matemática, levando à aceitação da resolução obtida – com base, eventualmente, em novas perspectivas ou inovações linguísticas.

Genericamente, a justificação para as reflexões deste capítulo resulta da percepção da existência de fronteiras porosas entre ciências, e entre as ciências e as artes, devido à constante transformação das suas definições e inter-relações. Além disso, as similitudes observadas entre a retórica e a demonstração matemática dão sustentação à hipótese de um diálogo entre a matemática e a narrativa. Identificam-se, conseqüentemente, seis áreas particulares de contacto ou comparação entre matemática e narrativa, que poderão servir de faróis na elaboração de narrativas, conducentes à transmissão de conceitos e ideias matemáticas, o que constitui um ponto de partida no sentido de tornar esse diálogo gerador de instrumentos e resultados.

Relativamente ao terceiro capítulo, *Um Percurso Histórico e Pedagógico* não se pretende estabelecer – nem pertence ao âmbito desta tese – um percurso histórico do ensino da Matemática em Portugal. Para esse efeito, poderíamos recorrer ao artigo “O ensino da matemática em Portugal: Uma prioridade educativa?”, de João Pedro da Ponte²⁹, para uma análise mais sucinta, ou à obra *A História do Ensino em Portugal*, de Rómulo de Carvalho³⁰, que o ilustra de forma mais completa.

Evidenciar pontos de contacto entre as sugestões pedagógicas, patentes na *Gazeta de Matemática*, e uma modernidade que ainda se interroga sobre a solução para os seus problemas educativos, constitui o principal objectivo. Para além disso, procurar-se dissecar a dicotomia entre uma perspectiva pedagógica dos aspectos formais da matemática e uma perspectiva dos aspectos mais conceptuais no ensino da matemática, mostrando que permanece como necessidade fundamental a criação de mecanismos que articulem estas duas perspectivas entre si (e com a bagagem cultural dos alunos), providenciando uma experiência íntima dos alunos com as ideias matemáticas.

²⁹ “O ensino da matemática em Portugal: Uma prioridade educativa?”, João Pedro Ponte, 15 de Abril de 2011, <[http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/02-Ponte\(CNE\).pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/02-Ponte(CNE).pdf)>, em 8 de Abril de 2014.

³⁰ *O Ensino da Matemática em Portugal: desde a fundação da nacionalidade até ao fim do regime de Salazar-Caetano*, Rómulo de Carvalho, Fundação Calouste Gulbenkian, 1986.

Falar da realidade como algo parado, estático, compartimentado e bem comportado, quando não falar ou dissertar sobre algo completamente alheio à experiência existencial dos educandos vem sendo, realmente, a suprema inquietação desta educação.³¹

Assim, dessa análise histórica, emergem como imperativos fundamentais que a actividade pedagógica reflecta a complexidade da vida; exija a compreensão do conceito matemático, para que se perceba a necessidade e importância do formalismo; contribua, através da assimilação de ideias, para a organização mental, a qual possuirá um papel transversal na formação do aluno; possua a forma adequada, tendo em conta o contexto, isto é, os alunos, o professor e a matéria em causa; ensine a actuar articuladamente com conceitos e formalismos e não a simplesmente operar com mecanismos formais; não pode constituir um conjunto de formalismos, mais ou menos acabados, que resolvem um conjunto de exercícios e problemas típicos, mas devem estar imbuídos de uma visão dinâmica da ciência. Para além disso, o currículo actualmente prescrito necessita de um maior cuidado e atenção na distinção clara entre conceitos matemáticos e mecanismos formais, destacando o que se constitui como verdadeiramente fundamental e o acessório. Na situação presente, os alunos não retêm, nem organizam correctamente as suas ideias, não conseguindo corresponder ao que deles se pretende. Torna-se, assim, essencial um maior enfoque nos conceitos matemáticos e uma menor preocupação, não com o rigor formal, mas com o formalismo *per se*. Importa também perceber que, mais importante do que os conteúdos disciplinares surge a comunicabilidade dos mesmos com outras disciplinas ou conhecimentos, pelo que a prática pedagógica deve privilegiar a porosidade e a noção de inacabado.

O quarto capítulo, *Literacia e Oralidade na Matemática*, inicia-se com uma nota histórica sobre a importância da oralidade na construção dos corpos culturais e das identidades civilizacionais nas comunidades humanas.

Em particular na transmissão do conhecimento matemático – tal como noutros campos do conhecimento – as histórias, os enigmas e os problemas constituem características de uma abordagem oral dos seus conteúdos e processos. Aliás, o diálogo constituiu até uma das primeiras estruturas de construção de uma narrativa escrita.

Acaba por não ser surpreendente, tal como se aborda neste capítulo, o reaparecimento do discurso oral com fins pedagógicos, fundamentado na redescoberta do seu poder como elemento significativo da aprendizagem. Mais do que isso, demonstra-se que a multiplicidade de codificações e de processos de conservação e transmissão do conhecimento constitui um elemento fundamental, numa aprendizagem que não se realiza por inércia da mensagem e exige a constituição de um contexto e de uma forma adequados ao conteúdo, ao professor e ao aluno, tal como se constata na obra do matemático e pedagogo brasileiro Júlio César de Mello e Souza, mais conhecido, como anteriormente já mencionado, pelo seu pseudónimo Malba Tahan. No entanto, observa-se que apenas

³¹ *Pedagogia do Oprimido*, Paulo Freire, Paz e Terra, 1970, p.57

com o aparecimento, nas últimas décadas do século passado, de novas formas de expressão e comunicação, surgiram implementações em larga escala de medidas facilitadoras da comunicação oral com fins pedagógicos. Para além disso, esse facto constituiu-se como fundamental na personalização do ensino da matemática e no desmontar de alguns equívocos enraizados na sociedade ocidental. Mas, como se conclui da argumentação de Walter Ong, não existiu uma substituição de formas antecedentes por novas formas de comunicação, mas antes uma interacção, com a qual se reforçam determinados aspectos e se reformulam outros, procurando sempre fugir aos dogmatismos.

A inumeracia, exemplo apresentado neste capítulo, gerada por um aprofundamento da incomunicabilidade da matemática, baseia-se na constituição de um conjunto de pressupostos equívocos que distancia os leitores dos textos matemáticos. John Allen Paulos identifica esses pressupostos, que contribuem para uma visão dogmática da matemática. O conto oral suscita o debate e o diálogo entre o que se ensina e o que se aprende, necessários à desconstrução dessa visão dogmática, possuindo um conjunto de características que podem auxiliar a assimilação e compreensão dos diferentes aspectos da matemática, denominados *conceptualização*, *manipulação* e *aplicações* por Elon Lages Lima, também neste capítulo explicitadas.

Por outro lado, não se pode diminuir a importância da literacia no desenvolvimento e evolução de todo o conhecimento humano, tal como fundamenta Walter Ong. No entanto, deve ser alvo de atenção a distinção entre essa sua natureza instrumental abrangente e uma capacidade de determinação do grau de veracidade dos objectos do conhecimento de que se ocupa, a qual não possui. Esse problema constituiu uma preocupação até nos primórdios da literacia, como se constata neste capítulo, quando a escrita era por vezes entendida como uma forma de retirar a centralidade do conhecer dos próprios seres humanos. Igualmente angustiante constituía a sua incapacidade de responder a um questionamento humano. De notar que, contemporaneamente, somos perpassados por um cepticismo, relativamente às novas tecnologias de comunicação emanadas da revolução computacional, de modo similar ao ocorrido no passado, em relação à escrita, algo que também aqui se explicita e fundamenta.

Antes da parte final do capítulo, foca-se a questão social e civilizacional e as consequências da manutenção ou alteração das premissas institucionalizadas no ensino da matemática.

Em suma, procura-se mostrar que a matemática já possui uma dimensão tão para além da capacidade humana, que não consegue escapar a uma codificação que a abarque e perpetue. No entanto, quando se concretiza e constitui em todo e cada indivíduo, torna-se múltipla e múltiplas são as suas manifestações. Conter e definir ideias matemáticas de uma forma uniforme diminui a sua capacidade de serem reinventadas e redescobertas pelos filhos dos seus criadores.

Na última parte deste capítulo analisa-se de que forma pode ser construída uma narrativa, com o objectivo de transmitir um conceito matemático. Por um lado, observando o seu conteúdo, pode-se

centrá-lo num conceito matemático – uma narrativa que transmite informalmente o conceito matemático –, ou pode-se centrá-lo no processo criador ou na escolha estética do criador – uma narrativa mais motivacional, do que esclarecedora dos conceitos matemáticos. Por outro lado, observando a estrutura narrativa, será possível gerá-la a partir de conceitos matemáticos – o conceito matemático constitui-se simultaneamente autor e actor da narrativa, revelando-se no final –, ou poderá formar a estrutura com formalismos matemáticos – eventualmente desconexos, sem uma preocupação pedagógica, mas apenas artística ou estética.

Definem-se, então, diferentes áreas da matemática, em virtude das diferenças patentes nas suas formas de expressão, mais ou menos visualizáveis – por exemplo, entre as matemáticas mais formalizadas e a geometria.

Estabelecem-se as definições, e respectivas regras, das partes da narrativa a ter em conta, nomeadamente o argumento, a conflitualidade, as imagens, os padrões, o deslumbre, o humor, o autor e o receptor.

Apresentam-se os passos para a elaboração da narrativa: objectivo; problema; estrutura narrativa e elementos; exposição oral; natureza da história (introdutória, cabal ou expansiva; género da narrativa – reais ou ficcionadas, conto, parábola, ensaio, etc.).

Num último assomo, justifica-se a escolha de uma exposição oral em detrimento de uma leitura oralizada, apresentando-se um exemplo de aplicação em sala de aula e respectivas conclusões, deixando-se em aberto a extensão desta metodologia aos mais variados conceitos.

Em conclusão, esta dissertação não se debruça especialmente sobre a génese dos conceitos matemáticos, mas apenas na medida em que eventualmente seja possível usar essa informação em benefício da qualidade da construção narrativa. Não versa sobre a evolução histórica dos conceitos matemáticos, mas também identifica e aproveita determinadas facetas dessa evolução para fundamentar e auxiliar à criação de instrumentos de tradução desses mesmos conceitos em outros suportes, que não os formais clássicos. Não possui, igualmente, apenas uma vertente de aplicação pedagógica, podendo ser, no entanto, génese estruturante de novas aplicações narrativas, não apenas em contexto escolar, mas também no âmbito da divulgação de conceitos matemáticos. O objectivo essencial passa então por fomentar o *vislumbre* matemático, através do *deslumbre* narrativo, fornecer os nutrientes matemáticos numa confecção com outro sabor, conceder um canto matemático para além do bater monocórdico dos malhos nas bigornas, desgastar a surdez matemática com batalhões de sucessões harmónicas. Reinventar a incompreendida e enjeitada matemática, de forma a todos os dias ter um novo príncipe encantado.

1 - Notas histórico-filosóficas sobre a Matemática e a narrativa.

1.1 Nota histórico-filosófica sobre a origem da Matemática.

A Matemática nasceu da necessidade de sobreviver e, essencialmente, da indispensável eficácia, exigida a seres frágeis como nós, na realização de tarefas relacionadas com a alimentação e protecção. A título de exemplo, basta referir que a nossa espécie é das que têm os maiores períodos de gestação, o que torna as nossas mães das mais vulneráveis do Reino Animal.

O cérebro humano possui aspectos objectivos – como a racionalidade e a sua constituição física – e subjectivos – como as emoções que sentimos ou a consciência que temos de nós mesmos. A racionalidade, que nos confere a capacidade de resolver problemas, constitui um atributo que necessita de estímulos, para que se desenvolva e evolua. Isto é facilmente observável no ensino, em que os alunos menos estimulados acabam por ter menos capacidade de resolução de problemas:

Resolver problemas é uma competência prática como, digamos, nadar. Adquirimos qualquer competência prática por imitação e prática. Ao tentar nadar, imitamos o que outros fazem com as mãos e com os pés para manter as suas cabeças fora de água e, finalmente, aprendemos a nadar, praticando natação. Ao tentar resolver problemas, temos de observar e imitar o que outras pessoas fazem quando resolvem problemas e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os.

O professor que deseja desenvolver nos seus alunos a capacidade de resolver problemas deve motivar, nas suas mentes, algum interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e de praticar.³²

Desta forma, a necessidade de codificar o mundo físico e também os processos mentais, em particular tudo o que não é directamente explicado pelos sentidos, despoletou a criação de instrumentos que pudessem ajudar a articular as dúvidas, as explicações e as soluções, numa linguagem transversal, clara e rigorosa – a Matemática. Mas, de facto, esse formalismo progressivamente construído tem por base as relações estabelecidas entre os seres humanos e o que constitui a sua parte externa – o mundo material, a linguagem e a cultura – que lhes permite, agindo sobre ela, compreender melhor todos os aspectos da sua existência, tal como defendia Fichte³³.

³² *Como Resolver problemas*, G. Polya, trad. Leonor Moreira, Lisboa: Editora Gradiva, 2003, p. 26.

³³ Johann Gottlieb Fichte (1762 –1814), filósofo alemão, cuja filosofia foi muitas vezes considerada como uma ponte entre as ideias de Kant e as ideias de Hegel. Recentemente tem ganho maior reconhecimento, devido à originalidade das suas reflexões sobre a natureza da autoconsciência. Tal como Descartes e Kant anteriormente, Fichte demonstrou grande interesse nos problemas da subjectividade e da consciência, que se reflectiu nas suas ideias sobre as ciências:

A forma da ciência encontra-se sempre um passo à frente do seu conteúdo, daí a ciência ser apenas uma probabilidade. Assim, o representado e a sua representação constituem duas entidades distintas. O pensamento que governa toda a doutrina da ciência produz representações. Mas isto não significa que toda a reflexão se debruça sobre essas representações. [...] Uma ciência assente na conceptualização representativa poderá ser uma boa introdução a essa ciência, mas não será a própria doutrina da ciência. [...] Aquilo que a doutrina da ciência estabelece constitui um conjunto de proposições, reflectidas e codificadas; o que lhe corresponde na mente humana não é mais do que um acto dessa mente, que não necessita ser ele próprio reflectido. Nada deve ser pressuposto em relação a este acto, senão o necessário para que esse acto não seja impossível como acto.

Pode até acontecer que os processos mentais geradores dos conceitos matemáticos vão para além do edifício formal e incluam tudo aquilo que designámos anteriormente por “externo” – como veremos à frente. Aliás, em relação aos processos mentais, muitas tentativas têm sido feitas para os afirmar como processos computacionais. No entanto, alguns argumentos inviabilizam essa procura de uma explicação computacional dos processos mentais. Por um lado, tudo o que um ser humano faz algoritmicamente, o computador também o pode fazer. Apesar disso, enquanto o ser humano o faz conscientemente, o computador fá-lo porque existe um utilizador externo que o comanda. Por outro lado, os computadores produzem resultados abstractos, independentes dos processos físicos, responsáveis pelo seu funcionamento. Um observador externo poderia generalizar, argumentando que todo o processo físico, e em particular o mental, pode ser interpretado como um processo computacional. Mas essa é uma das principais dificuldades, pois aparentemente não é possível descobrir se algum processo é intrinsecamente computacional, uma vez que a sua caracterização é sempre resultante da interpretação que um observador externo faz dos aspectos físicos e abstractos desse processo.

Outra questão problemática vem na sequência de algo que já foi dito: para os computadores existe sempre um utilizador, mas quem é o utilizador por detrás dos processos mentais? Não podem ser os efeitos abstractos da computação a gerar um processo mental, pois não são concretos e só actuam no contexto da sua implementação física, identificados pelo observador externo. O “computador” humano segue conscientemente regras e este facto explica o seu comportamento, na medida em que tem o poder de alterar essas regras ou não as cumprir. Esse poder de autodeterminação tem a sua génese na intuição humana de Tempo que, para Brouwer³⁴, constitui a base de toda a vida consciente³⁵. No entanto, a forma como olhamos para essa intuição pode gerar equívocos, nomeadamente se olharmos para ela como uma nova dimensão espacial. Na verdade, esta intuição do Tempo constitui-se como o sentir do Eu criativo, evoluindo livremente no seu tempo privado. Bergson³⁶ introduziu a diferença entre *Tempo* e *duração*, clarificando um pouco esta questão.

in *O Princípio da Doutrina da Ciência*, Johann Gottlieb Fichte (tradução livre de *The Science of Knowledge*, Johann Gottlieb Fichte, J.B. Lippincott & Co., 1868, University Microfilms International, 1981, pp. 58-60.)

³⁴ Luitzen Egbertus Jan Brouwer, (1881-1966), matemático holandês conhecido pelo teorema topológico do ponto fixo, que tem o seu nome. Fundou a doutrina do intuicionismo matemático, que considera a Matemática como uma formulação de construções mentais, que são determinadas por leis auto evidentes. Brouwer punha em dúvida a existência de qualquer objecto matemático que não pudesse ser construído na consciência, a partir de vivências mentais muito específicas.

³⁵ “The phenomena succeed each other in time, bound by causality because your colored view wills this regularity; but through the walls of causality “miracles” continue to glide and flow, visible only to the free, the enlightened.” in “*Life, Art and Mysticism*”, Luitzen Egbertus Jan Brouwer, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, volume 37, número 3, 1996, p. 394.

³⁶ Henri-Louis Bergson (1859-1941), Prémio Nobel da Literatura 1927, filósofo francês. Enquanto Kant considerava o livre-arbítrio como algo para além do tempo e do espaço e, em última instância, uma questão de fé, Bergson procurou redefinir as ideias de tempo, espaço e causalidade, utilizando o conceito de *Duração*,

Duração existe apenas para cada um de nós, enquanto o *tempo* subentende uma objectividade, que transforma a continuidade temporal em medições e definições discretas³⁷. Temos, assim, resultantes da construção de Brower, os seguintes efeitos:

- Um momento do *continuum* constitui um acto de consciência activa e o resultado das escolhas espontâneas que se podem fazer com o decorrer do tempo.
- A forma como se entende cada momento do *continuum* não pode ser pré-determinada, pois a construção do *continuum* depende do livre-arbítrio. Dessa forma, não constitui um objecto matemático usual, pois deriva duma construção com um futuro indeterminado.
- O *continuum* não pode ser compartimentado, porque cada instante depende das nossas escolhas. Cada instante não espera que o descubram, é criado de forma livre e espontânea, assim como todos os que constituem o *continuum*.

Uma das consequências mais relevantes do pensamento de Brower, pode ser resumida na seguinte citação de Jorge Luís Borges³⁸: “O Tempo é um rio que me leva com ele, mas eu sou o rio”. No entanto, Wittgenstein³⁹, nas *Investigações Filosóficas*, levanta outra questão: “Alguém que vai a correr para algum lado não pode observar a sua corrida”. Assim, quando se consegue descrever algo através da linguagem, esse algo já poderá estar diferente. Procura-se compensar este facto tentando antecipar o que as coisas serão no futuro. Este processo constitui algo que as simulações de processos mentais ainda não realizam. Estas não têm o poder de definir o que condicionará o futuro, nem fornecem justificações para as escolhas feitas pelos processos mentais. Mais do que isso, como testar uma simulação de um processo mental sem uma consciência? O cérebro não é um aparelho de processamento de informação, no sentido computacional, pois os eventos que lhe são transmitidos são

criando uma forma de conjugar o livre-arbítrio com a causalidade. Considerando a *Duração* como um conceito móvel e fluido, Bergson argumentou que não é possível compreendê-lo através de uma análise estática, mas apenas através da experiência pessoal (intuição).

³⁷ *Below homogeneous duration, which is the extensive symbol of true duration, a close psychological analysis distinguishes a duration whose heterogeneous moments permeate one another; below the numerical multiplicity of conscious states, a qualitative multiplicity; below the self with well-defined states, a self in which succeeding each other means melting into one another and forming an organic whole.*

in *Time and Free Will – An Essay on the Immediate Data of Consciousness*, Henri Bergson, Riverside Press, 1950, p.128.

³⁸ Jorge Francisco Isidoro Luís Borges (1899-1986), contista, ensaísta, poeta e tradutor argentino. A sua obra contribuiu para a literatura filosófica, bem como para o género literário fantástico e o do *realismo mágico*. O *realismo mágico* constituiu uma reacção contra o realismo/naturalismo do século XIX.

³⁹ Ludwig Joseph Johann Wittgenstein (1889-1951), filósofo austríaco, naturalizado britânico, um dos vultos de maior importância na filosofia do século XX. As suas principais contribuições foram feitas nos campos da lógica, da filosofia da linguagem, da filosofia da matemática e da filosofia da mente. O único livro de filosofia que publicou em vida, o *Tractatus Logico-Philosophicus*, de 1922, exerceu profunda influência no desenvolvimento do positivismo lógico. Mais tarde, a partir de 1930, as ideias por ele formuladas e difundidas em Cambridge e Oxford, impulsionaram ainda outro movimento filosófico, a chamada *filosofia da linguagem comum*, inspirada em grande medida nos seus últimos trabalhos, nomeadamente por *Investigações Filosóficas*.

concretos, específicos e conscientes, produzidos por processos biológicos e electroquímicos. Assim, os processos mentais são concretos, enquanto os processos computacionais são abstractos. Os processos mentais podem ser replicados através de processos computacionais, mas os processos computacionais não são processos mentais. Apesar disso, a estruturação abstracta continua a ter um papel fundamental nos conhecimentos que vão sendo adquiridos sobre o funcionamento dos processos mentais, continuando o debate sobre a sua origem e natureza⁴⁰.

Talvez a primeira percepção da natureza universal da Matemática tenha surgido com a abstracção da Geometria, nascida na Grécia Antiga, uma vez que, até então, todos os escritos sobre Matemática reflectiam uma concretização da mesma na realidade, não sendo apresentada por si só, mas como complemento ou auxiliar – a criação de diversos calendários, tábuas de barro com cálculos contabilísticos dos Sumérios, até aos problemas de armazenagem dos cereais dos Egípcios.

...eis que uma cultura local, tão singular [...] inventa este universal, num belo dia, quase datável...[...]...a geometria escreve uma linguagem universal que não grava nem traça nenhuma marca em nenhum suporte...[...] Sem sulco nem sementeira possíveis, sem memória, pois de nenhuma morada, eu diria sem história, eis, pois, a terra estranha, o não-lugar onde nasceu, sem raiz, a geometria.⁴¹

Foi fundamental, nesta aparição da Geometria, o papel da escola pitagórica⁴², que considerava que tudo, no universo, era número. Relativamente a este aspecto da filosofia pitagórica, Morris Kline⁴³ destaca que esses números não constituíam as abstracções assumidas contemporaneamente. Para os pitagóricos, esses números eram concretos:

⁴⁰ “Is the Brain a Digital Computer?”, John R. Searle, *Proceedings and Addresses of the American Philosophical Association*, 64 (November): 21-37 (1990)

⁴¹ *As Origens da Geometria*, Michel Serres, trad. Ana Simões e Maria da Graça Pinhão, Lisboa: Terramar, 1997, pp. 10 e 11.

⁴² Fundada por Pitágoras de Samos (570-497 a.C.).

“Pitágoras parece ter criado o modelo de definições, axiomas, teoremas e provas, segundo o qual a estrutura intrincada da geometria é obtida de um pequeno número de afirmações explicitamente feitas da acção de um raciocínio dedutivo rigoroso. Parece que a própria ideia de prova matemática deve-se a ele.”

in *Cálculo com Geometria Analítica*, George F. Simmons, trad. Seiji Hariki, Macgraw-Hill, 1996, p. 673.

⁴³ Morris Kline (1908-1992), professor de Matemática, publicou várias obras sobre História, Filosofia e Ensino da Matemática, bem como outras de divulgação de temas de Matemática. Uma das suas ideias mais interessantes sobre o papel do professor de Matemática está patente na seguinte afirmação:

“I would urge every teacher to become an actor. His classroom technique must be enlivened by every device used in theatre. He can be and should be dramatic where appropriate. He must not only have facts but fire. He can utilize even eccentricities of behavior to stir up human interest. He should not be afraid of humor and should use it freely. Even an irrelevant joke or story perks up the class enormously.” in “Mathematical texts and teachers: a tirade”, Morris Kline, *The Mathematics Teacher*, nº 49, 1956, p. 171.

Quando falavam de números triangulares, números quadrados, números pentagonais ou outros, eles pensavam em colecções de pontos, de seixos ou de objectos com um aspecto de ponto, dispostos com essas formas.⁴⁴

Numa fase mais tardia da escola pitagórica, a distinção entre número como entidade abstracta e número como aplicação no concreto veio a fazer-se; nas palavras de Filolau⁴⁵, “*pode-se observar o poder do número exercendo-se por si próprio...em todos os actos e pensamentos dos homens, em todas as manufacturas e na música.*”⁴⁶

Relativamente ao platonismo, tal como com os pitagóricos tardios, este distinguia claramente entre o mundo das ideias e o mundo físico: no primeiro, estariam as verdades imutáveis e absolutas; no segundo, objectos e relações estavam sujeitos a imperfeições, mudanças e decadências. Este facto reflectia-se na ideia de Matemática:

As leis matemáticas não eram apenas a essência da realidade, eternas e imutáveis. Também as relações numéricas eram parte da realidade e os conjuntos de coisas eram apenas uma imitação de números. Enquanto nos primeiros pitagóricos os números eram constituintes da realidade, para Platão os números transcendiam a realidade.⁴⁷

Outra problemática, que começa a surgir por essa altura, tem a ver com a demonstração de resultados matemáticos. Plutarco⁴⁸ relata que Eudócio⁴⁹ e Arquitas⁵⁰, contemporâneos famosos de

⁴⁴ *Mathematics - The Loss of Certainty*, Morris Kline, Oxford University Press, 1980, p. 12.

⁴⁵ Filolau de Crotona (Séc. V a.C.), filósofo pré-socrático pitagórico. Existe o consenso entre historiadores que tenha escrito um livro em que expunha a doutrina pitagórica (que era secreta e reservada apenas aos discípulos). Os fragmentos do livro conservam os mais antigos relatos sobre o pitagorismo e influenciaram fortemente Platão.

⁴⁶ *Mathematics - The Loss of Certainty*, Morris Kline, Oxford University Press, 1980, p. 12.

⁴⁷ *Ibid.*, p. 16.

⁴⁸ Plutarco de Queroneia ou Lucius Mestrius Plutarchus (nome que adoptou ao tornar-se cidadão romano) (45-120 d.C.), historiador, biógrafo, ensaísta e filósofo platónico grego. Escreveu sobre Platão, sobre os *estóicos* e os *epicuristas*. Plutarco terá escrito mais de 200 livros. Chegaram até nós cerca de 50 biografias de gregos e romanos ilustres, conhecidas como *Vidas Paralelas*. Foi na obra *Quaestiones Convivales* que abordou a controvérsia entre a argumentação de Eudócio e Arquitas e a de Platão, na justificação de resultados matemáticos.

⁴⁹ Eudócio de Cnido (408-355 a.c.), matemático e astrónomo grego. A ele se deve a teoria das proporções. Interessou-se também pelo movimento dos corpos celestes e formulou uma explicação original para o movimento aparente do Sol e dos outros corpos.

⁵⁰ Arquitas de Tarento (428-347 a.C.), matemático, astrónomo, músico, filósofo e político grego. A ele foram atribuídas muitas obras, hoje perdidas, principalmente sobre mecânica e geometria. Escreveu sobre as utilizações das médias aritméticas e geométricas e sobre geometria analítica. É o autor da mais antiga solução para o problema da duplicação do cubo, sendo uma construção engenhosa a três dimensões (e não no plano), que utiliza movimentos mecânicos na sua solução, provavelmente pela primeira vez na história da humanidade.

Platão⁵¹, usavam argumentos do mundo físico para justificar resultados matemáticos. Platão insurge-se contra isso, alegando que teria de ser o raciocínio puro a justificar esses resultados.

Mais tarde, surge em cena Aristóteles⁵², para quem as ciências físicas eram fundamentais. A Matemática ajudava na descrição de propriedades formais, providenciando razões para os resultados das observações dos fenómenos físicos. Apesar disso, Aristóteles entendia os conceitos matemáticos como abstracções. Sendo abstracções inferidas do mundo físico, eram aplicáveis a esse mundo.

Estas diferenças também se apresentam nas questões estéticas. Enquanto Platão tende a não dar importância à arte como diversidade e multiplicidade, Aristóteles concede uma cuidadosa atenção às distinções que são necessárias estabelecer nesse domínio. Para ele, a narrativa não constitui uma literal e passiva cópia das realidades que se pretendem transmitir, uma vez que apreende o geral, presente nos seres e nos eventos particulares, mas incide nos caracteres, paixões e acções dos homens. A narração constitui, assim, o princípio unificador subjacente a todos os textos, mas representa também o princípio diferenciador desses mesmos textos, visto que se consubstancia com meios diversos, se ocupa de objectos diversos e se realiza segundo modos diversos.

Constituíam um aliciente, para os autores gregos citados, procurar “verdades” sobre a estrutura matemática da natureza. Mas como garantir que eram “verdades”? Para isso, o primeiro princípio por eles assumido foi que a matemática teria de lidar com abstracções, pois de outra forma os conceitos matemáticos não teriam a generalidade necessária para abarcar todas as manifestações físicas desse conceito. Por outro lado, uma “verdade”, absoluta e imutável, não poderia pertencer ao mundo físico.

Este processo poderá ter sido iniciado com a *Odisseia* de Homero, na medida em que, tal como o afirma Italo Calvino⁵³, “o autor da Odisseia tem que colocar Ulisses fora de casa durante 10 anos, desaparecido...”, o que suscitará uma saída “do mundo conhecido, passar para outra geografia, para um mundo extra-humano [...], mas este mundo de sonho torna-se ao mesmo tempo a imagem

⁵¹ (Aristocles) Platão de Atenas (428 - 347 a.C.), filósofo e matemático do período clássico da Grécia Antiga, autor de diversos diálogos filosóficos e fundador da Academia em Atenas, a primeira instituição de educação superior do mundo ocidental. Juntamente com o seu mentor, Sócrates, e seu pupilo, Aristóteles, Platão ajudou a construir os alicerces da filosofia natural, da ciência e da filosofia ocidental. Em linhas gerais, Platão desenvolveu a noção de que o homem está em contacto permanente com dois tipos de realidade: a inteligível e a sensível. A primeira constitui-se como a realidade imutável, igual a si mesma. A segunda são todas as coisas percebidas pelos sentidos, realidades dependentes, mutáveis e imagens da realidade inteligível (Teoria das Ideias ou das Formas).

⁵² Aristóteles de Estagira (384-322 a.C.), filósofo grego, discípulo de Platão e professor de Alexandre, o Grande. As suas obras abrangem diversos assuntos, como a física, a metafísica, as leis da poesia e do drama, a música, a lógica, a retórica, o governo, a ética, a biologia e a zoologia. Juntamente com Platão e Sócrates, Aristóteles é visto como um dos fundadores da filosofia ocidental. Na obra *Analíticos* (Primeiro e Segundo), realiza a análise do raciocínio formal através do silogismo e da demonstração científica.

⁵³ Italo Calvino (1923 – 1985), jornalista, editor e escritor italiano. Era o autor italiano contemporâneo mais traduzido na altura da sua morte. O seu interesse pela ciência, e em particular pela matemática, constitui o reflexo das suas ligações a Raymond Queneau e ao Oulipo – grupo de escritores que utilizava os jogos de linguagem, em busca das múltiplas possibilidades criativas emergentes dos mesmos.

especular do mundo real em que vivemos, no qual predominam a necessidade e a angústia, o terror e a dor, e em que o homem está afundado sem saída”⁵⁴. Este imperativo de sublimação, de controlo e eventual previsão, que impregnou a cultura aristocrática helénica, pode ter sido a pedra de toque para a criação de uma realidade geométrica abstracta, para uma busca, entre os despojos do mundo, de uma estruturação que evidenciasse e justificasse os fenómenos reais.

Parece evidente como uma cultura de procura de invariantes, de padrões de formação e de comportamento, pode redundar na elaboração de uma obra como *Elementos*, de Euclides⁵⁵, criadora de uma linguagem abstracta expressiva e unificadora de algumas ideias resultantes dessas pesquisas.

1.2 Nota histórico-filosófica sobre uma abordagem linguística à construção da matemática.

A natureza da mudança no desenvolvimento da matemática foi pela primeira vez uma questão de sistemático debate na segunda metade do século XIX, em conexão com a descoberta das geometrias não-euclidianas⁵⁶. Este debate constituiu uma evidência da fundamental alteração na percepção da matemática. Mesmo no início do século XVIII ainda era comum os matemáticos tentarem legitimar as suas descobertas, sublinhando a sua importância, vinculando-as às autoridades antigas. Ao fazê-lo, assumiam implicitamente que os teoremas matemáticos expressam verdades, eternas e permanentes, sendo desta forma a descoberta apenas um acontecimento accidental, em que alguém toma consciência dessas verdades eternas. Esta estratégia de remontar as suas próprias descobertas a autores mais antigos foi usada até por Newton. De acordo com o testemunho de Nicolas Facio de Drivillier, Newton estaria convencido que todos os seus teoremas mais importantes da sua *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* já eram conhecidos por Platão e Pitágoras⁵⁷.

A ideia de progresso, que emergiu durante o Iluminismo, e a imagem de um génio criativo, influente durante o Romantismo, mudou radicalmente a visão que se tinha da natureza das descobertas matemáticas. No decurso do debate sobre a descoberta das novas geometrias, que teve início na segunda metade do século XIX, a personalidade do autor manteve-se em segundo plano. O contexto,

⁵⁴ *Porquê ler os Clássicos*, Italo Calvino, trad. José Colaço Barreiros, Teorema, 1991, p. 21.

⁵⁵ Euclides de Alexandria (360-295 a.C.), professor, matemático platónico e escritor. A sua obra *Elementos* constitui uma das mais influentes na história da matemática, servindo como o principal livro para o ensino da matemática (em particular da geometria), desde a data da sua publicação até o fim do século XIX ou início do século XX. Embora muitos dos resultados em *Os Elementos* tenham a sua origem em matemáticos anteriores, uma das inovações de Euclides foi apresentá-los numa única estrutura logicamente coerente, tornando-a fácil de usar e de fácil referência, a partir de um sistema rigoroso de provas matemáticas, que continua a ser a base da matemática. Euclides também escreveu obras sobre perspectivas, secções cónicas, geometria esférica, teoria dos números e rigor.

⁵⁶ Neste contexto, foi finalmente fundamentada e aceite uma mudança de perspectiva relativamente ao 5º postulado de Euclides. Em vez do enunciado, a ele equivalente, que afirma que a soma dos ângulos internos de um triângulo tem uma amplitude total de 180°, pode ser afirmado que uma soma superior ou inferior a esse valor também constituem alternativas válidas, das quais resultam outros tipos de geometria, chamadas geometrias não-euclidianas.

⁵⁷ *Newton und die Weisheit der Alten*, P. Rattansi, Fauvel, 1993, p. 239.

no qual se situava agora a reflexão sobre a questão da natureza da mudança no desenvolvimento da matemática, era o da *psicologia da descoberta*. Tal facto era bastante natural, uma vez que a maior parte dos autores, participantes neste debate, como Hermann von Helmholtz⁵⁸, Eugenio Beltrami⁵⁹, Henri Poincaré⁶⁰, ou Felix Klein⁶¹, eram eles próprios matemáticos com uma relação pessoal e íntima, poderemos assim dizer, com a questão da mudança na matemática. Nos seus textos, tentaram articular esta relação. Nesta conexão, talvez a passagem mais conhecida seja uma da obra *Science et Méthode*, de Poincaré:

Durante quinze dias tentei provar que não poderiam existir funções análogas às funções que, desde então, tenho denominado Fuchsianas. [...]. Uma noite bebi um café, algo que não era usual em mim, e não consegui dormir. Uma horda de ideias surgia nos meus pensamentos; quase que podia senti-las arremessarem-se umas contra as outras, até que duas se juntaram, formando um duo estável. Quando a manhã nasceu, tinha estabelecido a existência de uma classe de funções

⁵⁸ Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821 – 1894), físico, filósofo e médico alemão. Forneceu contribuições significativas em várias áreas da ciência moderna. Os seus estudos sobre geometria foram tornados públicos a partir de 1868, ano em que apresentou a conferência “Sobre os Verdadeiros Fundamentos da Geometria” em Heidelberg, publicando também “Sobre Factos Relativos à Geometria”. O título de Helmholtz, “Sobre Factos Relativos à Geometria”, constitui um eco deliberado da obra de Riemann “Sobre as Hipóteses Relativas à Geometria”. A diferença dos títulos, *factos* em vez de *hipóteses*, deriva de pelo menos uma diferença significativa na abordagem realizada pelos dois autores. Enquanto Riemann tenta descrever as propriedades gerais do espaço, Helmholtz procura determinar quais os axiomas geométricos mais gerais que permitem justificar a nossa medição empírica dos objectos físicos. Apesar da publicação anterior da obra de Riemann significar que os resultados obtidos por Helmholtz não seriam considerados originais – Helmholtz chegou aos seus resultados um pouco mais tarde –, este afirmou, no seu ensaio, que se sente satisfeito por “um tão distinto matemático [Riemann] ter considerado estas questões merecedoras de atenção”.

⁵⁹ Eugenio Beltrami (1835 – 1899), matemático italiano reconhecido pela sua obra em geometria diferencial e física matemática. Foi o primeiro a provar a consistência da geometria não-Euclidiana modelando-a na superfície de uma curva constante, denominada pseudo-esfera. O uso do cálculo diferencial na resolução de problemas de física matemática por Beltrami, influenciou o desenvolvimento do cálculo tensorial por Gregorio Ricci-Curbastro e Tullio Levi-Civita.

⁶⁰ Jules Henri Poincaré (1854 – 1912), matemático, físico teórico, engenheiro e filósofo da ciência francês. Frequentemente descrito como um polímato, e o último universalista na matemática – uma vez que alcançou a excelência em todas as áreas da disciplina, existentes durante o seu tempo de vida. Poincaré considerava tanto a geometria hiperbólica como a geometria euclidiana, adequadas na tarefa de descrever os fenómenos físicos. Segundo ele, a evolução darwiniana capacitou os seres humanos apenas com uma noção geral de *grupo* (as transformações que preservam as medidas das distâncias e dos ângulos); consequentemente, se os humanos utilizam com mais frequência a geometria euclidiana no lugar da hiperbólica, isso deve-se à simplicidade e conveniência da primeira, uma vez que o movimento dos corpos corresponde aproximadamente ao *grupo* Euclidiano. A experimentação providenciou a “ocasião” para se realizar esta escolha, uma vez que a utilização da geometria euclidiana foi uma contingência resultante do comportamento da luz e dos corpos na Terra. Para Poincaré, a equivalência empírica dos dois pontos de vista possíveis – Geometria euclidiana com uma física standard, ou a geometria hiperbólica com uma física alternativa, não especificada – coloca de parte uma fundamentação empírica da geometria do espaço físico. No entanto, manifestou pesar por Helmholtz não ter tornado clara essa questão.

⁶¹ Christian Felix Klein (1849 – 1925) matemático alemão, conhecido pela sua obra sobre teoria de grupos, análise complexa, geometria não euclidiana, e sobre as conexões entre teoria de grupos e a geometria. O seu Programa de Erlangen, classificador de geometrias pelos seus *grupos* de simetria subjacentes, foi uma síntese de grande influência em muita da matemática do seu tempo e na própria evolução da matemática. Klein mostrou como as propriedades essenciais de uma dada geometria podiam ser representadas por um *grupo* de transformações que preserve essas propriedades. Desta forma, a definição de geometria do Programa contemplava tanto a geometria Euclidiana como as não euclidianas.

Fuchsianas, obtidas a partir das séries hipergeométricas. Tive apenas de verificar os resultados, algo que só me demorou algumas horas.

De seguida, quis representar estas funções como um quociente entre duas séries. Esta ideia foi perfeitamente consciente e deliberada; fui guiado pela analogia com as funções elípticas. Perguntei-me quais deveriam ser as propriedades destas séries, se existissem, o que consegui sem dificuldade, constituindo as séries que denominei *Theta-Fuchsianas*.⁶²

Na passagem citada, Poincaré analisou a relação entre intuição e pensamento intencional na criatividade matemática. Este e outros textos similares determinaram o tom do debate na filosofia da matemática por volta do fim do século XIX. Os cientistas que foram protagonistas de mudanças fundamentais na matemática, durante o seu período criativo, tentaram reflectir filosoficamente sobre essas mudanças nos últimos anos das suas vidas.

Após a descoberta dos paradoxos lógicos nos primeiros anos do século XX, o interesse dos matemáticos desviou-se gradualmente na direcção dos fundamentos da matemática. Gottlob Frege⁶³, David Hilbert⁶⁴, Giuseppe Peano⁶⁵ e Bertrand Russell⁶⁶ podem ser mencionados como iniciadores do

⁶² *Science et Méthode*, Henri Poincaré, Flammarion, 1908, pp. 52-53.

⁶³ Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 – 1925), matemático, lógico e filósofo alemão. Considerado um dos fundadores da lógica moderna, deu contributos importantes para os fundamentos da matemática. Usualmente considerado o pai da filosofia analítica, pelos seus escritos sobre filosofia da linguagem e da matemática. Sendo maioritariamente ignorado pelo mundo intelectual aquando da publicação da sua obra, Giuseppe Peano (1858–1932) e Bertrand Russell (1872–1970) divulgaram os seus trabalhos a subseqüentes gerações de lógicos e matemáticos.

⁶⁴ David Hilbert, (1862 – 1943), matemático alemão. Hilbert descobriu e desenvolveu uma grande amplitude de ideias fundamentais em diversas áreas, incluindo teoria de invariantes e a axiomatização da geometria. Hilbert foi um dos fundadores da teoria da demonstração e da lógica matemática, bem como o primeiro a distinguir matemática de metamatemática. Em 1920 propôs um projecto de investigação (em metamatemática, como era denominado na altura), que ficou conhecido como o programa de Hilbert. Pretendia que a matemática fosse formulada em fundamentos lógicos, sólidos e completos. Publicou a sua perspectiva sobre os fundamentos da matemática na obra, em dois volumes, *Grundlagen der Mathematik* (Fundamentos da Matemática), David Hilbert e Paul Bernays, Springer, 1934.

“We are not speaking here of arbitrariness in any sense. Mathematics is not like a game whose tasks are determined by arbitrarily stipulated rules. Rather, it is a conceptual system possessing internal necessity that can only be so and by no means otherwise.” in “Natur und Mathematisches Erkennen: Vorlesungen”, realizado em 1919-1920, em Gotinga. (Org.) Paul Bernays (Editado e com uma introdução inglesa por David E. Rowe), Birkhauser, 1992, citado em <http://en.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert#cite_ref-34>, em 21 de Agosto de 2014.

⁶⁵ Giuseppe Peano (1858 – 1932), matemático italiano. Autor de mais de duzentas obras e artigos, foi fundador da lógica matemática e da teoria de conjuntos, para as quais contribuiu com muita notação. A axiomática usual dos números naturais é denominada axiomas de Peano em sua honra. Como parte do seu trabalho, encontram-se contribuições determinantes para o rigor e sistematização do método de indução matemática moderno.

⁶⁶ Bertrand Arthur William Russell (1872 – 1970), filósofo, lógico, matemático, historiador e crítico social inglês. Considerado um dos fundadores da filosofia analítica, juntamente com o seu predecessor Gottlob Frege e o seu protegido Ludwig Wittgenstein. Foi co-autor com Alfred North Whitehead de *Principia Mathematica*, uma tentativa para fundamentar a matemática com a lógica. A sua obra teve uma influência considerável na lógica, na matemática, na teoria dos conjuntos, na linguística, nas ciências cognitivas, na computação e na filosofia, em particular na filosofia da linguagem, na epistemologia e na metafísica.

debate sobre os fundamentos da matemática. Este debate manteve-se até ao presente ^{67,68}. Uma das principais distinções introduzidas foi a distinção entre o contexto de descoberta e o contexto de justificação. De acordo com esta distinção, podemos colocar dois conjuntos de questões fundamentalmente diferentes, associadas a cada contexto, acerca de cada proposição matemática. As respostas ao primeiro conjunto de questões, relacionadas com o contexto de descoberta, elucidam sobre quem, quando e em que circunstâncias foram descobertas determinadas proposições matemáticas. Estas questões pertencem à psicologia, à sociologia, ou à história. Assim, ao formular essas questões, encontramos-nos ao fim de pouco tempo fora da filosofia da matemática. As respostas às questões relacionadas com o contexto de justificação elucidam sobre em que condições as proposições são verdadeiras, que pressupostos são necessários para as justificar, que proposições as contradizem. Ao colocar estas questões, mantemo-nos no âmbito da filosofia da matemática.

Do ponto de vista da distinção entre o contexto da descoberta e o contexto da justificação, o debate dos fundamentos da matemática pertencia inequivocamente ao contexto da justificação. Por outro lado, a questão da natureza da mudança na matemática, que dominou a filosofia da matemática no final do século XIX, pertencia ao contexto da descoberta. Como os proponentes da distinção supracitada estavam convencidos que a filosofia da matemática deveria estar confinada ao contexto da justificação, foram realizados esforços para excluir a questão da natureza da mudança na matemática da filosofia da matemática e remetê-la para o campo da psicologia. O contexto psicológico no qual foi discutida esta questão, no final do século XIX e princípio do século XX, só catalisou esses esforços de realocização. Embora os esforços para excluir a questão da natureza da mudança na matemática não tenham tido sucesso, o criticismo do psicologismo, apresentado pelos proponentes da abordagem fundacional, chamou a atenção para a necessidade de uma reformulação intersubjectiva da mesma.

Consequentemente, quando o debate sobre a natureza da mudança na matemática regressou – devido às obras *How to solve it?* (1945), *Mathematics and Plausible Reasoning* (1954) e *Mathematical Discovery* (1962), de George Polya⁶⁹, bem como à série de artigos de Imre Lakatos⁷⁰,

⁶⁷ *The Philosophy of Mathematics Today*, M. Schirn, Clarendon Press, 1998.

⁶⁸ *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, ed. Stewart Shapiro, Oxford University Press, 2005.

⁶⁹ George Pólya (1887 –1985), matemático húngaro. Deu contributos fundamentais no cálculo combinatório, na teoria dos números e em probabilidades e análise numérica. Também são de monta os seus contributos para a heurística e educação matemática. Na última fase da sua carreira, despendeu bastante do seu tempo e energia tentando caracterizar os métodos utilizados pelas pessoas para a resolução de problemas e descrever como a resolução de problemas deveria ser ensinada e aprendida. A esse propósito, publicou quatro obras importantes: *How to Solve It*; *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*; *Mathematics and Plausible Reasoning Volume I: Induction and Analogy in Mathematics*; *Mathematics and Plausible Reasoning Volume II: Patterns of Plausible Inference*.

⁷⁰ Imre Lakatos (Imre Lipschitz) (1922-1974), filósofo da Matemática e da ciência húngaro, conhecido pela sua tese da falibilidade da Matemática e a sua “metodologia de demonstrações e refutações” nas suas fases pré-axiomáticas de desenvolvimento, bem como a introdução do conceito de “programa de investigação” na sua metodologia de programas de investigação científica. A filosofia da Matemática de Lakatos foi inspirada na

Proofs and Refutations (1963-1964) –, o contexto da descoberta – centrado na psicologia – deu lugar a uma maior reflexão sobre o contexto da metodologia da mudança. O problema do rigor de uma demonstração, da coerência da argumentação, da fiabilidade de uma heurística ou da duração temporal de uma refutação tornaram-se o centro das atenções. Todos estes problemas pertencem à esfera dos aspectos linguísticos internos de uma descoberta. Neste contexto, Polya desenvolveu os seus *métodos de raciocínio plausível* e Lakatos formulou o seu *método de demonstrações e refutações*. A alteração da psicologia da descoberta para a metodologia da mudança veio a mostrar-se uma transformação feliz, pois, por esse facto, a filosofia da matemática estabeleceu pontos de contacto com os debates da filosofia da ciência.

Quando Thomas Kuhn⁷¹ escreveu a *Estrutura das Revoluções Científicas*, iniciou-se um diálogo interessante entre a filosofia da matemática e a filosofia da ciência. Por um lado, ao adaptar as suas perspectivas em filosofia da matemática, Lakatos propôs uma *metodologia dos programas de pesquisa científica* (1970), entrando em polémica com Kuhn, no campo da filosofia da ciência. Por outro lado, em resultado da transferência da questão da natureza da mudança em matemática para um contexto metodológico, tornou-se possível adoptar a posição de Kuhn relativamente à matemática e formular o problema da possibilidade de revoluções na matemática. Como exemplos do anteriormente explanado, podemos mencionar os artigos “Ten “laws” concerning Patterns of change in the history of mathematics”, de Michael Crowe (1975), “T. S. Kuhn’s theories and mathematics: a discussion paper on the “new historiography” of mathematics”, de Herbert Mehrtens (1976) e “Conceptual revolutions and the history of mathematics: two studies in the growth of knowledge”, de Joseph Dauben (1984). Estes artigos iniciaram um vívido debate, que foi sumariado na obra *Revolutions in Mathematics*⁷². Isto também ilustra como o contexto da metodologia da mudança constitui um meio propício para o debate sobre a natureza da mudança no desenvolvimento da matemática, continuando a atrair a atenção até ao presente⁷³.

dialéctica de Hegel e de Marx, na teoria do conhecimento de Karl Popper e na obra do matemático George Polya. Tinha um desacordo fundamental com a concepção “formalista” de demonstração, que prevalecia no logicismo de Frege e de Russell, que define demonstração apenas em termos de validade formal.

⁷¹ Thomas Samuel Kuhn (1922 – 1996), físico, historiador e filósofo da ciência americano, que introduziu o termo “mudança de paradigma”, na obra *A Estrutura das Revoluções Científicas*. Kuhn produziu um conjunto de afirmações relevantes e inovadoras sobre o progresso do conhecimento científico: que as áreas científicas enfrentam periodicamente “mudanças de paradigma”, em vez de evoluírem numa progressão linear e contínua; que estas “mudanças de paradigma” suscitam novas abordagens na compreensão do que nunca seria considerado válido pelos cientistas anteriormente; o ponto de vista segundo o qual a verdade científica não pode ser determinada, ao longo do tempo, apenas por critérios objectivos, sendo igualmente definida pelo consenso de uma comunidade científica. “Paradigmas” em competição são incomensuráveis, isto é, são duas diferentes perspectivas da realidade que não podem ser reconciliadas de forma coerente. Assim, a noção de ciência nunca pode sustentar-se totalmente na “objectividade”; todos os factores subjectivos condicionam quaisquer conclusões objectivas que possam ser retiradas.

⁷² *Revolutions in Mathematics*, D. Gillies, Clarendon Press, 1992.

⁷³ *The Growth of Mathematical Knowledge*, E. Grosholtz, H. Bregger, Kluwer, 2000.

Durante os anos 50 e 60 do século passado, quando o debate sobre a natureza da mudança no desenvolvimento da matemática era dominado por questões metodológicas, ocorreram importantes desenvolvimentos na área da filosofia analítica. Sob a influência da obra de Ludwig Wittgenstein e de autores como John Austin, Donald Davidson, Paul Grice, Jaakko Hintikka⁷⁴, Hilary Putnam, Willard van Orman Quine e Wilfried Sellars, a forma como se formulavam questões e como se elaboravam respostas mudou fundamentalmente. Como ilustração desta deriva radical, na visão do papel da linguagem na filosofia da matemática, podemos mencionar a análise da filosofia da geometria de Kant, na obra de Jaakko Hintikka⁷⁵ e de Michael Friedman⁷⁶. Na sua reconstrução do papel da intuição na filosofia da geometria de Kant, Hintikka desafiou a perspectiva que era geralmente aceite e que dominava a tradição analítica desde *Grundlagen der Geometrie*, de Hilbert (1899). De acordo com esse ponto de vista, partilhado por filósofos como Bertrand Russell ou Rudolph Carnap, as figuras geométricas são meros auxiliares psicológicos que melhoram a nossa compreensão de uma teoria particular, mas que em nada contribuem para o conteúdo da própria teoria. Em contraste, Hintikka argumentava que as figuras e construções intuídas têm um papel importante nos *Elementos* de Euclides⁷⁷. Assim, as figuras geométricas não constituem apenas ferramentas didáticas ou psicológicas, mas são partes constituintes da estrutura lógica das teorias geométricas. Este argumento foi aprofundado por Friedman, mostrando que as figuras geométricas tinham de ser usadas, até ao desenvolvimento da teoria de quantificação moderna (i.e., até à publicação de *Begriffsschrift*, de Frege, em 1879), para compensar as insuficiências da denominada lógica monádica⁷⁸.

⁷⁴ Kaarlo Jaakko Juhani Hintikka (n. 1929), filósofo e lógico finlandês. Autor e co-autor de mais de trinta obras e de trezentos artigos, contribuiu para a lógica matemática, a lógica da filosofia, a filosofia da matemática, a epistemologia, a teoria da linguagem, e a filosofia da ciência. As suas obras estão traduzidas em mais de nove línguas.

A investigação mais usual em epistemologia trata da avaliação e justificação da informação recolhida. Em *Socratic Epistemology: Explorations of Knowledge-Seeking by Questioning* (Cambridge University Press, 2007), Jaakko Hintikka procura responder a outra questão, debatendo o problema de como o conhecimento é, primeiramente, adquirido. O seu modelo de pesquisa de informação constitui o antigo método socrático de questionamento, que foi generalizado e trazido à contemporaneidade através da teoria lógica das questões e respostas, por ele desenvolvida.

⁷⁵ “III. Kantian Intuitions,” *Inquiry* 15 (1-4), 1972, pp. 341-345; “Russell, Kant, and Coffa,” *Synthese* 46 (2), 1981, pp. 265-270; “Kant’s Theory of Mathematics Revisited,” *Philosophical Topics* 12 (2), 1981, pp. 201-215; “Kant’s Transcendental Method and His Theory of Mathematics,” *Topoi* 3 (2), 1984, pp. 99-108.

⁷⁶ Michael Friedman (n. 1947), filósofo da ciência com interesse particular em Immanuel Kant e no movimento pós-analítico na filosofia. Na sua obra *Dynamics of Reason* (2001), Friedman preenche lacunas importantes no progresso e surgimento de paradigmas, não completamente resolvidas por Thomas Kuhn. Para além disso, Friedman, em “Kant on Geometry and Spatial Intuition” (*Synthese* 186 (1), 2012, pp. 231-255), usa desenvolvimentos recentes sobre Kant e argumentação diagramática para reflectir sobre os aspectos centrais da filosofia da geometria de Kant e a sua relação com a intuição matemática. Michael Friedman já anteriormente se tinha debruçado sobre o tema da geometria em Kant, no artigo “Kant’s Theory of Geometry” (*Philosophical Review* 94 (4), 1985, pp. 455-506).

⁷⁷ “Kant’s new method of thought and his theory of mathematics”, J. Hintikka, *Knowledge and the Known, Modern Essays*, Reidel, 1965, p.130.

⁷⁸ “Kant’s Theory of Geometry”, M. Friedman, *The Philosophical Review*, 94, 1985, pp. 466-468.

Os argumentos de Hintikka e de Friedman são importantes, porque nenhum deles vê a linguagem da matemática como uma forma ideal de existência atemporal, mas antes entendendo a linguagem da matemática como um sistema historicamente mutável. Desta forma, eles introduzem uma dimensão histórica aos fundamentos da matemática. A matemática constitui sempre o resultado da força de alguns instrumentos linguísticos, cuja historicidade aplica uma dimensão histórica aos fundamentos da matemática. Contudo, este modelo de historicidade constitui um modelo bem diferente da mais comum versão do mesmo. A historicidade proposta por Hintikka e Friedman não tem a sua origem em qualquer influência externa (social, política ou cultural). A historicidade dos fundamentos da matemática é interna; é baseada na historicidade da linguagem matemática. Deve-se ao facto dos instrumentos lógicos e expressivos que utilizamos na construção da matemática teórica possuírem uma componente histórica. Em alguns momentos particulares da história, certas elaborações lógicas eram simplesmente impossíveis.

Outro aspecto importante dos argumentos de Hintikka e de Friedman reside na paridade atribuída às figuras geométricas, em relação às fórmulas simbólicas, como componentes da linguagem matemática. Parece que, pela primeira vez na tradição analítica, as figuras geométricas não são vistas como meros auxiliares psicológicos, mas como um instrumento importante na construção da estrutura lógica das teorias matemáticas.

Como foi visto, no início do século XX a crítica do sector formalista da filosofia da matemática deu um impulso importante à reformulação da questão da natureza da mudança na matemática. Essa crítica provocou a transição da análise desta questão do contexto psicológico da descoberta, para o contexto da metodologia da mudança. Aparentemente a alteração na tradição analítica, ilustrada pelas ideias de Hintikka e Friedman, pode fornecer um impulso similar à formulação da questão da natureza da mudança na matemática. É possível que tenha chegado o tempo de substituir o contexto de metodologia da mudança, i.e., o contexto utilizado por Polya e Lakatos nas suas análises da descoberta matemática, da heurística ou das refutações, por um novo contexto, o contexto da mudança linguística. Este contexto chama-nos a atenção para problemas como: que inovações linguísticas acompanharam uma descoberta matemática particular; qual o enquadramento linguístico de uma determinada heurística; que meios linguísticos foram utilizados numa determinada refutação. Aparentemente as descobertas fundamentais da história da matemática estão intimamente relacionadas com inovações linguísticas relevantes. Os grandes descobridores eram, por regra, grandes inovadores linguísticos. E muitas vezes era a mudança da linguagem, a mudança nas regras de sintaxe ou de semântica, que permitia a um matemático expressar conexões até esse momento indizíveis e, dessa forma, chegar a novas descobertas. Quando mudamos o debate da mudança no desenvolvimento da matemática do contexto da metodologia, para o contexto da linguagem, todo esse debate alicerça-se em fundações muito mais firmes.

Claro que a questão da linguagem foi um tópico central nos debates sobre os fundamentos da matemática desde Frege, Peano e Hilbert. Não obstante, o problema foi a linguagem da matemática ser vista como um cálculo lógico ideal e atemporal. Deixando de olhar para a matemática estritamente como resultado de uma linguagem lógica atemporal e aceitando a historicidade dos instrumentos linguísticos da matemática, torna-se possível analisar as mudanças por eles induzidas no desenvolvimento da matemática. Assim, podemos interpretar o desenvolvimento da matemática como uma sequência de inovações linguísticas.

Conclui-se, assim, que ao contrário do que é comum pensar-se, a matemática não é um conjunto de símbolos e respectivas articulações, mais ou menos definidas. Imre Lakatos afirma que “a matemática não pode crescer mediante um aumento monótono do número de teoremas, estabelecidos fora de qualquer dúvida, mas sim através de uma cadeia incessante de hipóteses e suposições, especulações e críticas.”⁷⁹. Os símbolos e objectos matemáticos, tal como um qualquer idioma, não são um conjunto de frases ou vocábulos com um sentido específico único, adoptando outras significações em diferentes contextos, nomeadamente históricos. Assim, são instrumentos de formalização, que descrevem ideias que resultam de processos mentais – o que faz com que essas ideias surjam de experiências individuais, mas que sejam condensadas numa linguagem específica, que expurga os elementos não comuns a essas experiências individuais. No entanto, como se verá adiante, essa linguagem não poderia ter sido construída em absoluto sem a participação de factores “externos” – o mundo material, a linguagem e a cultura –, que constituem, amiúde, elementos fundamentais para a sua compreensão.

Recentemente, Ladislav Kvaz reforçou a ideia da importância das linguagens icónicas para o desenvolvimento da matemática, introduzindo o conceito de *recodificação*, como um dos aspectos que determina a evolução da matemática. Este conceito pode ser definido como a capacidade da matemática se reinventar, através de linguagens icónicas que permitem a ligação entre antigos e novos contextos linguísticos.

Os papéis da geometria e da aritmética na filosofia da matemática contemporânea são bastante assimétricos. A razão para esta assimetria reside nas diferentes atitudes em relação à linguagem destas duas partes principais da matemática. Desde os trabalhos de Frege, Peano e Russell, a linguagem da aritmética foi totalmente formalizada, sendo as fórmulas da aritmética consideradas uma parte constituinte da teoria. Por outro lado, em geometria, as figuras geométricas são consideradas apenas auxiliares heurísticos, que podem ajudar a compreender a teoria, mas que não pertencem estritamente à própria teoria. Apesar de existirem boas razões para esse desenvolvimento dos fundamentos da matemática, poderá ser interessante estabelecer uma ponte entre a filosofia da aritmética e a filosofia da geometria. Com esse propósito, torna-se necessário realizar na geometria o que Frege fez na

⁷⁹ *Pontes Para o Infinito*, Michael Guillen, trad. Jorge da Silva Branco, Lisboa: Editora Gradiva, 1987, p. 27.

aritmética. Isto significa, antes de mais, a formalização da sua linguagem transformando, dessa forma, as figuras geométricas, de meros auxiliares heurísticos, para partes integrantes das próprias teorias. Uma figura geométrica não constitui apenas o objecto físico formado pelos pontos de grafite na superfície mais ou menos rugosa do papel. Entendamos a figura como uma expressão (um termo) da linguagem icónica, com o seu próprio significado e referência. Seguimos aqui uma analogia com a aritmética ou a álgebra, onde uma fórmula não constitui um objecto físico, i.e., não são pontos numa folha de papel. Se fossemos bem-sucedidos na incorporação das figuras geométricas na linguagem matemática, isso permitiria uma compreensão mais profunda dos períodos da história da matemática onde as figuras geométricas e a argumentação com base nelas desempenharam um papel crucial. Existe um interessante movimento periódico na história da matemática, consistindo na alternância entre períodos simbólicos e geométricos. Assim, se no Antigo Egipto e na Babilónia a abordagem simbólica era dominante, mais tarde, na Grécia Antiga, a geometria ganhou predominância e dominou a matemática até ao século XVI, quando um revivalismo da abordagem simbólica ocorreu na álgebra. No século seguinte, devido à descoberta da geometria analítica, a linguagem icónica assumiu de novo o protagonismo, enquanto o século XIX testemunhou o regresso do domínio da linguagem simbólica, na forma da aritmetização da análise matemática. Este fenómeno ainda não foi suficientemente compreendido. Ninguém ainda tentou empreender uma análise séria do assunto. A alternância entre períodos icónicos e simbólicos tem uma natureza vaga e obscura e essa pode ser a razão dissuasora de tal intento. Contudo, a sua natureza vaga e obscura parece resultar de um insuficiente entendimento dos aspectos lógicos e epistemológicos das figuras geométricas. Enquanto as figuras forem consideradas vagas e obscuras, a sua claramente visível alternância histórica com as linguagens formais também se manterá igualmente vaga e obscura. Ao interpretar as figuras como uma linguagem icónica, cria-se um suporte que torna possível a compreensão das relações entre os períodos simbólicos e icónicos da história da matemática.

2 Epistemologia da matemática e da narrativa.

2.1 Elementos de epistemologia da matemática.

Quando começaram a existir diferentes notações e significados para um mesmo conceito ou símbolo, surgiu a necessidade de definir e organizar, em geral, os caracteres expressivos da Matemática. Tornou-se necessário recorrer a uma axiomática tendencialmente universalista, tal como a descrita por Platão, para se fazerem demonstrações matemáticas:

Aqueles que se ocupam da geometria, da aritmética e ciências desse género, admitem o par e o ímpar, as figuras, três espécies de ângulos, [...] estas coisas, dão-nas por sabidas, e, quando as usam como hipóteses, não acham que ainda seja necessário prestar contas disto a si mesmos nem aos outros, uma vez que são evidentes para todos. E, partindo daí e analisando todas as fases, e tirando as consequências, atingem o ponto a cuja investigação se tinha abalançado.⁸⁰

Mas foi Aristóteles quem definiu, pela primeira vez, axiomas e postulados. Para ele, axiomas eram afirmações básicas para qualquer nível ou natureza do conhecimento. Postulados eram afirmações fundamentais de um determinado conhecimento, que necessitariam de ser evidentes por si só ou suportadas pelas suas consequências. Segundo Aristóteles, umas e outras teriam de ser “verdadeiras” para que fosse válido o conhecimento adquirido a partir delas. No entanto, Platão já teria dado conta desses axiomas. Mas para ele não eram necessárias as manifestações físicas dos axiomas, uma vez que, segundo as suas convicções, as nossas almas já possuíam esse conhecimento e, como tal, só precisariam de os recordar. Para Aristóteles os axiomas são entidades que não suscitam na mente humana qualquer dúvida.

A partir dos axiomas, teriam de ser retiradas conclusões, usando o raciocínio lógico. Existem vários tipos de raciocínio lógico, entre eles a indução, a analogia e a dedução. Mas apenas um deles garante a correcção das conclusões, como se pode observar dos exemplos descritos por Morris Kline⁸¹:

⁸⁰ *A Formação da Matemática Contemporânea*, Jean Dieudonné, Lisboa: Publicações D. Quixote, 1990, p. 49.

⁸¹ Morris Kline (1908 – 1992) (conforme citado na nota 43), historiador, filósofo, pedagogo e divulgador da matemática. Autor de uma das obras de maior fôlego da história da Matemática, *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, de 1972. Ivor Grattan-Guinness, um conceituado historiador da matemática, comentou do seguinte modo esta obra:

“It is the first general history which begins to reflect the actual development of mathematics, and is by far the best yet to appear. ... nothing can, or should, dispel the fine impression that this book leaves. I am still amazed by the amount that Kline has achieved.” in “Review: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times by Morris Kline”, Ivor Grattan-Guinness, *Science*, New Series 180 (4086), 1973, pp. 627-628.

Kline elaborou uma série de artigos sobre a “nova matemática” nos anos cinquenta e sessenta em periódicos como *The Mathematics Teacher* (“Mathematics Texts and Teachers” (1956), “The Ancients vs. the Moderns” (1958) e “A Proposal for the High School Mathematics Curriculum” (1966)).

“Instead of presenting mathematics as rigorously as possible, present it as intuitively as possible. Accept and use without mention any facts that are so obvious that students do not recognize that they are using them. Students will not lose sleep worrying about whether a line divides the plane into two parts. Prove only what the students think requires proof. The ability to appreciate rigor is a function of the age of the student and not of the age of

A conclusão que todas as maçãs são vermelhas porque mil maçãs são vermelhas é um raciocínio indutivo e, consequentemente, não é absolutamente fiável. Igualmente o argumento analógico que nos diz que o John deve ser capaz de se licenciar porque o irmão, que herdou as mesmas capacidades, o fez, não é certamente muito confiável. Já o raciocínio dedutivo, apesar de poder apresentar várias formas, pode garantir uma correcta conclusão. Se dissermos que todos os homens são mortais, sendo Sócrates um homem, teremos que aceitar que ele é mortal.⁸²

Existem vários tipos de raciocínios dedutivos, entre os quais os silogismos (ver exemplo anterior), o princípio da não contradição (uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa) e a lei do terceiro excluído (uma proposição só pode ser verdadeira ou falsa). É de referir, no entanto, que os princípios da lógica dedutiva foram extraídos da própria prática realizada pelos matemáticos nessa altura. Eudóxio terá descoberto o método da exaustão, que viria a ser utilizado mais tarde por Arquimedes⁸³ para calcular áreas e volumes, algo que é hoje resolvido pelo cálculo analítico. Notemos que Ptolomeu⁸⁴, tal como Eudóxio, compreendia que a sua teoria era apenas uma descrição matemática conveniente que encaixava nas observações, mas que não seria necessariamente uma estrutura basilar da natureza. Em alguns casos, Ptolomeu apresentava esquemas alternativos para as órbitas dos planetas, mas escolheu os mais simples, pois era esse o critério que ele achava ser o mais correcto. Apesar da visão dedutiva da Matemática e da representação matemática das leis da natureza, os gregos mais tardios já recorriam à experimentação e à observação dos fenómenos naturais.

No entanto, a prova por meios dedutivos é essencial para definir se um teorema é matemático ou não, não só porque valida uma afirmação e a torna geral para todas as possíveis aplicações, mas também porque acaba por ir ao encontro do desejo de descobrir ou reencontrar objectos ideais ou universais⁸⁵.

mathematic.” in “A Proposal for the High School Mathematics Curriculum”, Morris Kline, The Mathematics Teacher, volume 59, nº 4, 1966, p. 324.

⁸² *Mathematics, The Loss of Certainty*, Morris Kline, Oxford University Press, 1980, p. 20.

⁸³ Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.), matemático, físico, engenheiro, inventor e astrónomo grego. Por redução ao absurdo, foi capaz de resolver problemas com um grau arbitrário de rigor, dando conta dos limites entre os quais se encontrava a solução. Esta técnica de cálculo, conhecida por método de exaustão, permitiu-lhe, na obra *Medição de um Círculo*, determinar valores aproximados de π e de $\sqrt{3}$, bem como concluir que a área de um círculo é igual a $\pi \times r^2$.

⁸⁴ Cláudio Ptolomeu (83-161 d.C.), cientista grego que viveu em Alexandria, reconhecido pelas suas obras sobre matemática, astrologia, astronomia, geografia e cartografia, bem como óptica e teoria musical. A sua obra mais conhecida é o *Almagesto* (que significa "O grande tratado"), um tratado de astronomia. Esta obra constitui uma síntese dos trabalhos e observações de Aristóteles, Hiparco, Posidónio e outros, apresentando um sistema cosmológico geocêntrico, em que os outros corpos celestes descrevem órbitas em redor da Terra. A representação geométrica do sistema solar de Ptolomeu, com círculos, *epiciclos* e *equantes*, permitia prever o movimento dos planetas com considerável precisão e foi utilizada até ao Renascimento, no século XVI.

⁸⁵ *A Matemática é feita de afirmações [...] relacionadas entre si por regras de dedução precisas. Se se souberem as regras de dedução e algumas afirmações iniciais, que se presume serem verdadeiras (axiomas), está-se preparado para obter muito mais afirmações verdadeiras (teoremas). [...] Os axiomas cobrem as*

O impulso para a elaboração de uma abordagem matemática da natureza tem que ser creditada à obra de Euclides, *Elementos*, pois apesar de ter sido uma tentativa de se constituir como um estudo das propriedades da Geometria, a sua organização, engenho e clareza inspirou a abordagem axiomático-dedutiva, não só noutras áreas da Matemática, mas em todas as ciências.

Tal como existem propriedades que explicam os fenómenos naturais, existem estruturas naturais na Matemática, das quais se podem apresentar muitos exemplos, podendo não ser imediatamente evidentes. Constituem-se como as formas puras, imaginadas por Platão. Assim, o matemático tem acesso às estruturas naturais como o filósofo alcança as ideias luminosas, do ponto de vista platónico. Esta perspectiva tem o nome de *platonismo matemático* e constitui uma das visões preferidas pelos matemáticos – em diversas formulações distintas⁸⁶ – para a sua disciplina. O significado dessas estruturas, que é conferido pela perfeição, pureza e simplicidade que o matemático persegue, surpreendentemente responde ao desejo de perfeição, pureza e simplicidade que o humano, que existe no matemático, procura alcançar. No entanto, estas estruturas não se deixam materializar na mente de um matemático se não forem resultado da relação que se estabelece com um problema relevante:

Os problemas são a força motriz da matemática. Um bom problema é aquele cuja solução, em vez de conduzir a um beco sem saída, abre horizontes inteiramente novos.⁸⁷

Esta característica coloca em evidência a natureza lacunar, fragmentária, dos bons problemas matemáticos que, por outro lado, amplificam e unificam as estruturas naturais, mencionadas anteriormente. Contudo, estes problemas podem apresentar-se em contextos diversos, podendo ser, em geral, de dois tipos: internos, na medida em que levam ao debate e posterior compreensão dos mecanismos intrínsecos às estruturas da Matemática; de modelação matemática, na qual se faz a tradução matemática de uma situação problemática concreta numa determinada formulação, cuja resolução oferece uma solução à situação em causa. Aparentemente poderia assumir-se que a segunda situação não tem tanta relevância para a construção interna da Matemática, mas pensar assim constitui um equívoco, nomeadamente se pensarmos, por exemplo, que foi transpondo para modelos

propriedades básicas dos objectos em que se está interessado. [...] A Matemática, tal como é feita pelos matemáticos, não consiste apenas na acumulação de afirmações deduzidas logicamente dos axiomas. Na sua maior parte, essas afirmações são desnecessárias...[...] Os resultados (teoremas) [...] interessantes organizam-se em estruturas naturais e com significado e pode-se dizer que o objecto da Matemática é encontrar e estudar essas estruturas.

in O Cérebro dos Matemáticos, David Ruelle, trad. Edgar Rocha, Gradiva, 2007, pp. 21 e 22.

⁸⁶ Para uma noção mais completa e profunda desta questão, consultar *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, Mark Balaguer, Oxford University Press, 1998.

⁸⁷ *Problemas da Matemática*, Ian Stewart, trad. Miguel Urbano, Gradiva, 1987, p. 16.

matemáticos alguns conceitos físicos – como a energia ou o princípio da “ação mínima”, por exemplo – que se obtiveram métodos gerais de resolução de certas equações da análise funcional.⁸⁸

Mais do que isso, muitas vezes considera-se que são residuais as relações entre a Matemática e a realidade. No entanto, tal conclusão não se encontra legitimada pela análise estatística que se pode realizar dessas relações:

O filósofo grego Platão acreditava que toda e qualquer coisa concebível, existe algures no universo. [...] Esta noção... [...] é conhecida como o “princípio da plenitude”. [...] ... com muita frequência, as ideias em Matemática são concebidas por mentes [...] racionais, e não realistas, de modo que a extensa coincidência entre o mundo inventado pelos matemáticos e o mundo natural não resulta meramente de um propósito por parte dos matemáticos para descrever a realidade.⁸⁹

Conclui-se, então, que existe uma ligação natural entre a Matemática e a realidade, estabelecida pela forma como os matemáticos interpretam e expressam formalmente a sua realidade humana individual. Possivelmente a pesquisa sistemática de elementos externos ao formalismo matemático – se entendido como apenas as estruturas simbólicas – e a sua utilização na expressão de conceitos matemáticos, poderia constituir uma fonte geradora de novas imagens da Matemática, suscitando novos pontos de contacto com a sociedade, com a arte e com a ciência, fomentando, de forma mais célere, a descoberta de novas aplicabilidades concretas e de novas ideias matemáticas. Até porque durante séculos construíram-se imateriais Torres de Babel⁹⁰, com a segurança dos pressupostos, que se acreditavam

⁸⁸ *A Formação da Matemática Contemporânea*, Jean Dieudonné, trad. J. H. von Hafe Perez, Publicações Dom Quixote, 1987, p. 33.

⁸⁹ *Pontes para o Infinito*, Michael Guillen, trad. Jorge da Silva Branco, Gradiva, 1983, p. 72.

⁹⁰ A Torre de Babel, que significa a "porta do céu" ou a "porta de Deus", é mencionada na Bíblia (Génese, 11), como uma das construções mais ambiciosas do homem:

1 E era toda a terra de uma mesma língua e de uma mesma fala.

2 E aconteceu que, partindo eles do Oriente, acharam um vale na terra de Sinar; e habitaram ali.

3 E disseram uns aos outros: Eia, façamos tijolos e queimemo-los bem. E foi-lhes o tijolo por pedra, e o betume, por cal.

4 E disseram: Eia, edifiquemos nós uma cidade e uma torre cujo cume toque nos céus e façamo-nos um nome, para que não sejamos espalhados sobre a face de toda a terra.

5 Então, desceu o SENHOR para ver a cidade e a torre que os filhos dos homens edificavam;

6 E o SENHOR disse: Eis que o povo é um, e todos têm uma mesma língua; e isto é o que começam a fazer; e, agora, não haverá restrição para tudo o que eles intentarem fazer.

7 Eia, desçamos e confundamos ali a sua língua, para que não entenda um a língua do outro.

8 Assim, o SENHOR os espalhou dali sobre a face de toda a terra; e cessaram de edificar a cidade.

9 Por isso, se chamou o seu nome Babel, porquanto ali confundiu o SENHOR a língua de toda a terra e dali os espalhou o SENHOR sobre a face de toda a terra. in Génese, capítulo 11, Bíblia.

A Torre de Babel era obra do orgulho humano, pois pretendia estar à altura de Deus e eventualmente contra ele. Então, para castigar a obra do orgulho humano, Deus resolveu confundi-los na sua linguagem, de tal forma que não se compreendessem uns aos outros. Sem se entenderem, os construtores da Torre de Babel interromperam os seus trabalhos de construção e dispersaram-se por toda a terra, dando origem às diversas culturas e diferentes

serem frágeis, sobre a capacidade da Matemática traduzir com rigor a essência do universo, desde Galileu⁹¹ - para quem “o livro da natureza é escrito em linguagem Matemática”⁹² - a Laplace⁹³ - que afirmou que Isaac Newton⁹⁴ era um homem extremamente afortunado, pois só há um universo e ele tinha descoberto as suas leis.

No entanto, em finais do século XIX, começaram a surgir questões que colocaram em causa o edifício matemático. As visões díspares sobre o universo, que surgiram, assumiram um papel importante. De facto, se o universo funcionasse de acordo com essas leis, reversíveis no tempo e determinísticas, ele seria estático e pré-determinado e estas continuariam a descrever observações válidas, independentemente do factor Tempo. Assim surgiram duas perspectivas relativamente à matematização do universo – uma, a estática, que originava leis que expressavam certeza e a outra

línguas que se falam no mundo. A partir de então, Babel passou a ser sinónimo de confusão e a simbolizar o castigo divino sobre a arrogância, orgulho e paganismo humanos.

⁹¹ Galileo Galilei (1564-1642), físico, matemático, astrónomo e filósofo italiano. Resultado das suas pesquisas são as melhorias do telescópio e consequentes observações astronómicas que substanciaram a teoria heliocêntrica (Copernicismo). Os seus contributos para a astronomia incluem a confirmação telescópica das fases de Vénus, a descoberta dos quatro maiores satélites de Júpiter, dos anéis de Saturno, das manchas solares e das montanhas e crateras da Lua. Galileu Galilei desenvolveu os primeiros estudos sistemáticos do movimento uniformemente acelerado e do movimento do pêndulo. Descobriu a lei dos corpos e enunciou o princípio da inércia e o conceito de referencial inercial, ideias precursoras da mecânica newtoniana. O físico desenvolveu ainda vários instrumentos como a balança hidrostática, um tipo de compasso geométrico que permitia medir ângulos e áreas, o termómetro de Galileu e o precursor do relógio de pêndulo. O método empírico, defendido por Galileu, constitui um corte com o método aristotélico mais abstracto utilizado nessa época. Devido a este novo método, Galileu é considerado como o “pai da ciência moderna”.

⁹² *Philosophy is written in this all-encompassing book that is constantly open before your eyes, that is the universe; but it cannot be understood unless one first learns to understand the language and knows the characters in which it is written. It is written in mathematical language, and its characters are triangles, circles, and other geometrical figures; without these it is humanly impossible to understand a word of it, and one wanders around pointlessly in a dark labyrinth.*

in *The Essential Galileo*, ed. e trad. Maurice A. Finocchiaro, Hackett Publishing Company, 2008, p. 183.

⁹³ Pierre-Simon, Marquês de Laplace (1749-1827), matemático, astrónomo e físico francês que organizou a astronomia matemática, sintetizando e ampliando o trabalho dos seus predecessores nos cinco volumes da sua *Mécanique Céleste* (1799-1825). Esta obra-prima traduziu o estudo geométrico da mecânica clássica para uma abordagem da mesma através do cálculo, que veio a suscitar um leque mais abrangente de problemas. Laplace acreditava fortemente no *determinismo*, o que está patente na seguinte citação:

Nós podemos tomar o estado presente do universo como um efeito do seu passado e a causa do seu futuro. Um intelecto que, em dado momento, conhecesse todas as forças que colocam a natureza em movimento, bem como todas as partes que a constituem e respectivas localizações, mas que também fosse suficientemente vasto para analisar essas informações compreenderia, numa única fórmula, os movimentos dos maiores corpos do universo e os do menor átomo; para tal intelecto nada seria incerto e o futuro, assim como o passado, seria presente aos seus olhos. in *Essai philosophique sur les probabilités*, Pierre Simon de Laplace, Courcier, 1814, pp. 2-3.

⁹⁴ Sir Isaac Newton (1642-1727), físico, matemático, astrónomo, filósofo natural, alquímico e teólogo inglês. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, publicado em 1687, forneceu a base geral para a Mecânica Clássica. Nessa obra, Newton descreveu a gravitação universal e as três leis do movimento, que dominaram a perspectiva científica do universo físico nos três séculos que se seguiram. Newton mostrou que o movimento dos corpos na Terra e dos astros no Espaço rege-se pelo mesmo conjunto de leis naturais, ao demonstrar a consistência entre as leis do movimento planetário de Kepler e a sua teoria da gravitação, respondendo assim às dúvidas relativamente ao heliocentrismo e despoletando a Revolução Científica.

que incluía a passagem do tempo (arrow of time) –, reflexo da segunda lei da termodinâmica, da qual se conclui que os processos macroscópicos aparentemente estão “direccionados” temporalmente, na medida em que os sistemas tendem, de forma espontânea, para um estado de equilíbrio no futuro, mas não se afastam espontaneamente de um estado de equilíbrio, e da mecânica quântica, que descreve um universo evolucionário baseado na possibilidade das coisas poderem ou não acontecer. Esta foi, provavelmente, uma das descobertas que colocou em causa a “verdade” universal que parecia emanar da construção matemática. Tomou-se então consciência da existência de estruturas matemáticas que não podiam ser simultaneamente verdadeiras. Mais do que isso, isto vinha colocar em xeque uma das maiores convicções da História, que a Matemática traduzia plenamente a Natureza. Tal como afirmou Morris Kline, “tinha-se perdido a chave para a realidade”⁹⁵. Outro exemplo de problemáticas que foram emergindo ocorreu no século XVIII, quando Saccheri⁹⁶ e Lambert⁹⁷ tentaram demonstrar o postulado euclidiano das paralelas (que definia que se duas rectas são intersectadas por uma terceira e a soma dos ângulos internos do mesmo “lado” é menor que dois ângulos rectos, as duas primeiras rectas intersectam-se em algum ponto do plano desse “lado”), por pensarem ser redundante. Veio a provar-se, no século XIX, ser essencial na definição da Geometria Euclidiana e a substituição deste postulado na axiomática da Geometria originou outras geometrias, denominadas Não-Euclidianas⁹⁸. A crise dos fundamentos da Matemática agudizou-se ainda mais na primeira metade do século XX, quando os matemáticos procuraram universalizar a Matemática, tentando criar uma linguagem unificadora dos conceitos passados, presentes e futuros. Tal não só se revelou impossível de realizar, como motivou enormes conflitos entre os matemáticos. De tudo isto veio a resultar um teorema que demonstrou, com rigor, que não era possível basear a veracidade dos resultados da maioria das teorias matemáticas na sua própria lógica axiomática (base de quase tudo em Matemática). A esperança dos matemáticos ligados à Teoria de Conjuntos era que, após conseguirem uma axiomática consistente

⁹⁵ *Mathematics, The Loss of Certainty*, Morris Kline, Oxford University Press, 1980, p. 4.

⁹⁶ Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733), padre jesuíta e matemático italiano. Ele é fundamentalmente conhecido pela sua última publicação, de 1733, pouco antes da sua morte. Actualmente considerado como sendo historicamente o segundo trabalho de Geometria Não-Euclidiana (muitas das ideias de Saccheri foram precedidas, no Século XI, pelas do persa Omar Khayyam, na sua obra "Discussão sobre as dificuldades de Euclides" (Risâla fî sharh mâ ashkala min musâdarât Kitâb 'Uglîdis)), a obra Euclides ab omni naevo vindicatus (Euclides livre de qualquer falha) permaneceu na obscuridade até ser redescoberta por Eugénio Beltrami, em meados do Século XIX. O objetivo do trabalho de Saccheri era estabelecer de maneira ostensiva a validade de Euclides através do uso de uma redução ao absurdo (reductio ad absurdum) que provasse o 5º postulado (postulado das paralelas), objeto de discussões que vinham pelo menos desde o grego Proclo (século V). Tentou assumir que o postulado era falso e demonstrar a contradição, possivelmente não tendo tido tempo para retirar conclusões mais determinantes para a história da geometria.

⁹⁷ Johann Heinrich Lambert (1728-1777), matemático de origem francesa, radicado na Alemanha. Lambert foi o primeiro a introduzir as funções hiperbólicas na trigonometria. Fez também conjecturas sobre o espaço não-Euclidiano. Elaborou uma fórmula relacionando os ângulos e as áreas dos triângulos hiperbólicos. Estes são triângulos obtidos numa superfície côncava, como uma sela, em vez da habitual superfície euclidiana plana. Lambert mostrou que os ângulos internos desses triângulos são inferiores a 180°.

⁹⁸ *History of Mathematics – an Introduction*, V.J.Katz, Nova Iorque: Harper Collins Publisher, 1993; 58, pp. 296-297.

deste ramo da Matemática, fosse possível basear a Aritmética nessa axiomática e alcançar, com isso, fundamentos sólidos para a sua disciplina. Tal desejo não foi satisfeito, devido ao Teorema da Incompletude de Kurt Gödel⁹⁹, que veio a demonstrar que qualquer teoria, na qual a aritmética dos números naturais possa ser expressa, tem resultados verdadeiros que não podem ser demonstrados a partir dos axiomas dessa teoria.¹⁰⁰ Assim, sem possibilidade de irmanar todos os saberes da Matemática, os matemáticos libertaram-se das amarras de uma obsessão, que veio a permitir a substituição da tentativa de aglutinação do conhecimento matemático pelo sonho de abrangência da diversidade universal. No fundo, até esse instante, tínhamos a legítima esperança – porque baseada em conhecimentos ainda discrimináveis – de conseguir enquadrar o universo numa qualquer axiomática generalista. De tudo isto resultaram duas posturas perante a crise da Matemática. Uma prevê que um dia a Matemática será unificada, defendida por Nicolas Bourbaki¹⁰¹:

Desde os primórdios, todas as revisões críticas dos princípios da Matemática como um todo, ou de qualquer um dos seus ramos, seguiram-se, quase invariavelmente, a períodos de incerteza, onde as contradições surgiam e tinham que ser resolvidas. [...] Existem agora vinte e cinco séculos durante os quais os matemáticos têm sistematicamente corrigido os seus erros, tendo visto a sua ciência enriquecida e não empobrecida; isto dá-lhes o direito de olhar para o futuro com serenidade.^{102,103}

A outra visão sobre o futuro das Matemáticas é a de matemáticos como Hermann Weyl¹⁰⁴, que revela a sua inclinação para a eterna dependência da Matemática relativamente ao Homem, com todas as consequências que isso acarreta:

⁹⁹ Kurt Friedrich Gödel (1906-1978). Sendo um dos lógicos mais importantes de todos os tempos, a sua obra teve um imenso impacto na ciência e no pensamento filosófico do século XX, um século onde muitos cientistas, como Bertrand Russell (1872-1970), Alfred North Whitehead (1861-1947) e David Hilbert (1862-1943), eram pioneiros no uso da Lógica e da Teoria de Conjuntos para compreender os fundamentos da Matemática. Gödel é conhecido pelos seus dois teoremas da incompletude, publicados em 1931, quando tinha 25 anos, um ano depois de ter completado o seu doutoramento na Universidade de Viena.

¹⁰⁰ *History of Mathematics – an Introduction*, V.J.Katz, Nova Iorque: Harper Collins Publisher, 1993, p. 727.

¹⁰¹ Pseudónimo criado por um grupo de proeminentes matemáticos franceses: Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Coulomb, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, Charles Ehresmann, René de Possel, Szolem Mandelbrojt e André Weil, inicialmente, e Laurent Schwartz, Jean-Pierre Serre, Alexander Grothendieck, Samuel Eilenberg, Serge Lang e Roger Godement. Com o objectivo de basear toda a matemática na teoria de conjuntos, Bourbaki procurou, nas suas obras, o rigor e a generalidade. A sua produção levou à descoberta de diversos conceitos e terminologias, muitos deles ainda hoje utilizados e debatidos.

¹⁰² *Mathematics, The Loss of Certainty*, Morris Kline, Oxford University Press, 1980, p. 6.

¹⁰³ Devemos recordar aqui que Armand Borel, participante activo das reuniões de Bourbaki, descreve um ambiente de desordem e confrontação. Quando as ideias mais pertinentes surgiam e se impunham, dizia-se que o espírito tinha soprado (*l'esprit à soufflé*), com o que isso representa em termos simbólicos...

¹⁰⁴ Hermann Klaus Hugo Weyl (1885-1955), matemático e físico teórico alemão. Publicou obras técnicas e gerais sobre o espaço, o tempo, a matéria, filosofia, lógica, simetria e história da matemática. Acerca do formalismo matemático, escreveu:

“We are not very pleased when we are forced to accept a mathematical truth by virtue of a complicated chain of formal conclusions and computations, which we traverse blindly, link by link, feeling our way by touch. We want first an overview of the aim and of the road; we want to understand the idea of the proof, the deeper

A questão dos fundamentos da Matemática e do significado último das matemáticas mantém-se em aberto; não sabemos por que caminho encontrará a sua solução final ou se é expectável uma resposta final. A “matematização” pode bem ser uma actividade criativa do homem, como a linguagem ou a música, de uma originalidade primária, cujas decisões históricas desafiam uma racionalização objectiva completa.¹⁰⁵

Mas a relação entre a Matemática e a realidade levanta outras questões. Com efeito, apesar de existir a necessidade constante de uniformizar definições formais, a reformulação das ideias obriga a uma reescrita permanente dos conceitos.

...“generalidade” e “profundidade” não têm o mesmo sentido para aqueles que as empregam; há também modas e entusiasmos...[...] Estas divergências de apreciação fazem lembrar as querelas suscitadas pelas obras de arte...[...] Serão portanto necessários outros critérios para avaliar um trabalho matemático, e estes só podem ser subjectivos, o que leva a dizer que as matemáticas são muito mais uma arte do que uma ciência.¹⁰⁶

Mais do que isso, o próprio contexto onde se dão esses processos pode situar-se para além da margem que delimita a ciência matemática:

A Matemática tem tanto de ciência como de arte. É feita por pessoas que são influenciadas pela Filosofia e pelas circunstâncias culturais, pela ciência e pela poesia, pela política, pelo estilo e por outras paixões, por todas as tradições às quais pertencem. Assim, a Matemática ocorre em muitos locais que não vêm altamente recomendados nos guias racionalistas.¹⁰⁷

Mesmo na perspectiva, supostamente mais palpável, da ligação da Matemática ao Mundo Físico, a percepção que se pode ter da sua importância nevrálgica é difusa e complexa. Desde a Grécia Antiga, o Mecanicismo ocupou um lugar fulcral na compreensão dos fenómenos físicos:

O Mecanicismo, então, afirma uma realidade que não é mais que uma máquina complexa que transporta objectos no tempo e no espaço. Como nós somos parte dessa máquina, toda a humanidade tem de ser explicável em termos de matéria, movimento e Matemática.¹⁰⁸

No entanto, observando o que foi anteriormente exposto, esta perspectiva perdeu força, em resultado de tantas variáveis incontroláveis e da aleatoriedade de muitos fenómenos, que não podem ser compreendidos sem recurso a noções de probabilidade:

context.” “*Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften*” (“Topology and Abstract Algebra as Two Roads of Mathematical Comprehension”), trad. Abe Shenitzer, *The American Mathematical Monthly*, volume 102, nº 5 (Maio de 1995), p. 453.

¹⁰⁵ *Mathematics, the Loss of Certainty*, Morris Kline, Oxford University Press, 1980, p. 6.

¹⁰⁶ *A Formação da Matemática Contemporânea*, Jean Dieudonné, trad. J. H. von Hafe Perez, Publicações Dom Quixote, 1987, p. 41.

¹⁰⁷ *Mathematics and the Roots of Postmodern Thought*, Vladimir Tasic, Oxford University Press, 2001, p. 5.

¹⁰⁸ *Mathematics and the search for Knowledge*, Morris Kline, Oxford University Press, 1985, p. 229.

A força gravitacional foi substituída pelas geodésicas da Relatividade no Espaço-Tempo. Aceitamos a propagação das ondas electromagnéticas cuja natureza física desconhecemos. Também nos é pedido que aceitemos uma dualidade onda-partícula que desafia o senso comum, como se por magia os electrões, que são partículas, se tornassem ondas quando projectados para fora de um átomo.¹⁰⁹

Outro princípio que foi questionado pela emergência de novos conceitos físicos constitui o Princípio da Causalidade:

Durante muitos séculos, mais ou menos até 1900, a Causalidade foi suportada pela crença no Mecanicismo. Muitos efeitos aconteciam em virtude de, entre a causa e o efeito, um mecanismo físico operar para se produzir o efeito. Na origem, a causalidade implicava o contacto entre causa e efeito, ou pelo menos uma contiguidade espacial. Contudo, este conceito foi rapidamente estendido à acção à distância, como no caso da gravidade.¹¹⁰

A questão da causalidade teve uma enorme importância no pensamento ao longo dos tempos, primeiramente associada ao Mecanicismo e subsequentemente – devido à nossa incapacidade de identificarmos algumas causas para alguns efeitos e alguns efeitos de certas causas – de uma forma independente e suscitando algumas questões pertinentes, tal como se pode constatar no caso de Immanuel Kant¹¹¹ que afirma, na sua *Crítica da Razão Pura* (1781), que a causalidade constitui uma pré-condição lógica necessária para todo o raciocínio lógico, não sendo necessário o suporte por evidência factual. David Hume¹¹² suscita a questão estatística de não ser suficiente, para que se verifique uma sequência particular de causa e efeito, que esta ocorra um grande número de vezes. Assim sendo, a crença na causalidade constitui um hábito, que não fornece uma base adequada para uma crença. John Stuart Mill¹¹³ acrescenta que a causalidade alicerça-se numa generalização empírica. Sendo a indução a base de algumas generalizações, pode também sê-lo para algumas leis da natureza.

¹⁰⁹ *Ibid.*, p. 229.

¹¹⁰ *Ibid.*, p. 233.

¹¹¹ Immanuel Kant (1724-1804), filósofo prussiano. Kant operou, na epistemologia, uma síntese entre o racionalismo continental (de René Descartes e Gottfried Leibniz, onde impera a forma de raciocínio dedutivo), e a tradição empírica inglesa (de David Hume, John Locke, ou George Berkeley, que valoriza a indução). Kant é famoso sobretudo pela elaboração do denominado idealismo transcendental: todos nós trazemos formas e conceitos *a priori* (aqueles que não vêm da experiência) para a experiência concreta do mundo, os quais seriam de outra forma impossíveis de determinar.

¹¹² David Hume (1711-1776), filósofo, historiador, economista e ensaísta escocês, conhecido em particular pelo seu *empiricismo* e *cepticismo* filosófico. Hume argumentou contra a existência de ideias inatas, concluindo que os humanos adquirem o seu conhecimento apenas através da experiência pessoal. Ele desenvolveu a ideia de que o nosso comportamento mental é determinado pelo “costume”, que é uma capacidade adquirida; o uso que fazemos da indução, por exemplo, é justificado apenas pela “constante conjunção” de causas e efeitos.

¹¹³ John Stuart Mill (1806-1873), filósofo e economista político britânico. Mill foi um empiricista radical, que defendia que todo o conhecimento humano, mesmo a matemática e a lógica, constitui resultado da generalização das experiências sensoriais. Em *A System of Logic, Ratiocinative and Inductive* (1843), Mill explicou em grande detalhe os cânones que permitem concluir, a partir do raciocínio indutivo, as relações causais patentes no mundo natural.

Para além das questões abordadas pelos autores anteriores, surgiu ainda outra questão relacionada com a ordem com que se dão causa e efeito. Não poderia o efeito ser a causa?

Mais recentemente, a Teoria da Relatividade perturbou a relação entre causa e efeito. Normalmente assume-se que a causa é anterior ao efeito. De acordo com a Relatividade, contudo, a ordem dos dois eventos já não é uma relação absolutamente determinada.¹¹⁴

Precisamente por não ser possível comprovar, em certas situações, a relação de causa-efeito, tornou-se necessário definir uma nova teoria, o Determinismo, que afirma que não percebemos todas as relações de causalidade, por sermos seres limitados. Para todos os efeitos essa relação não existe, pois tudo já é:

De facto, supostamente Newton já teria questionado o porquê de enunciar os teoremas da geometria euclidiana, uma vez que os mesmos resultam, de uma forma óbvia, dos axiomas. A maior parte dos seres humanos, apesar disso, levam muito tempo a descobrir cada uma destas propriedades. Mas esta descoberta ao longo do tempo, que parece relacionar axiomas e teoremas da mesma forma temporal, tal como a causa e o seu efeito, é ilusória.¹¹⁵

Assim, todo o Universo estaria bem determinado e não haveria margem para indeterminações, como ilustra Voltaire¹¹⁶:

Seria deveras singular se toda a natureza, todos os planetas, tivessem que obedecer a leis eternas, havendo algures um pequeno animal... [...] ...que, contrariando estas leis, pudesse agir a seu bel-prazer, ao sabor dos seus caprichos.¹¹⁷

No entanto, existem situações muito particulares, que colocam em causa o Determinismo, que veremos de forma mais profunda mais adiante. Para já, fiquemos apenas com uma pequena noção:

...o fósforo que inicia um fogo florestal, a pequena palavra que coloca o mundo em guerra, e o pequeno gene que faz de nós filósofos ou idiotas são fenómenos instáveis. [...] As leis cedem nestes instantes, e os efeitos que são negligenciáveis noutras circunstâncias, tornam-se dominantes.¹¹⁸

¹¹⁴ *Ibid.*, p. 236.

¹¹⁵ *Ibid.*, p. 237.

¹¹⁶ François-Marie Arouet “Voltaire” (1694-1778), escritor, historiador e filósofo francês do iluminismo, conhecido pelo seu pseudónimo “Voltaire”. Escreveu mais de 20000 cartas e mais de 2000 livros e panfletos. Usou frequentemente as suas obras para criticar a intolerância, os dogmas religiosos e as instituições francesas da sua época. Na obra *Candide*, Voltaire debate, através das suas personagens, se existe um destino, ou se este é fruto do livre-arbítrio de cada homem. Voltaire conclui que cada pessoa determina, com as suas acções, o que pode ser o seu futuro, tendo que “cultivar o seu jardim”, de forma que cresça e floresça, exactamente como devemos alimentar e cuidar da nossa própria vida, para nos tornarmos úteis e significativos.

¹¹⁷ *Mathematics and the search for Knowledge*, Morris Kline, Oxford University Press, 1985, p. 238.

¹¹⁸ *Ibid.*, p. 239.

Assim, o Determinismo teve que se vergar às leis estatísticas, que passaram a assumir um papel fundamental no estudo do mundo físico:

O uso das leis estatísticas começou com a Mecânica Estatística, na qual podíamos, se o desejássemos, acreditar que, estudando milhões de colisões de moléculas com um comportamento determinístico, determinaríamos, por exemplo, o comportamento de um gás; contudo, o número é tão grande que é impossível considerar o efeito da massa com outros meios que não a estatística. [...] Mais ainda, o comportamento dos quanta de Planck¹¹⁹, dos fótons de Einstein¹²⁰ e dos saltos dos electrões de Bohr¹²¹ não podem ser previstos com certeza.¹²²

No entanto, muitos cientistas ainda acalentaram a possibilidade de ultrapassar os problemas do Determinismo, como Albert Einstein, Erwin Schrödinger¹²³ ou Paul Dirac¹²⁴. Para Einstein, seria mais aceitável um mundo sem leis, um mundo de caos, do que um mundo em que estejamos sujeitos, em cada circunstância, a um lançamento de dados por parte de Deus. De forma optimista, Schrödinger

¹¹⁹ Karl Ernst Ludwig Max Planck (1858-1947) Prémio Nobel Física em 1918, físico teórico alemão, estando na génese da teoria quântica. Em física, um quantum é a quantidade mínima de qualquer entidade física envolvida numa determinada interacção. Por exemplo, um fóton é um quantum de luz. A mecânica quântica é o ramo da física que lida com fenómenos físicos de escalas microscópicas.

¹²⁰ Albert Einstein (1879-1955), Prémio Nobel da Física em 1921, físico teórico, natural da Alemanha, que desenvolveu a teoria da relatividade geral, provocando uma revolução na física teórica. Apesar de reconhecido pela sua fórmula de equivalência entre massa e energia, recebeu o prémio nobel pela descoberta da lei do efeito fotoelétrico, descoberta fundamental para a sustentação da teoria quântica.

¹²¹ Niels Hendrik David Bohr (1885-1962), Prémio Nobel da Física em 1922, físico dinamarquês cujos trabalhos contribuíram decisivamente para a compreensão da estrutura atómica e da física quântica. Bohr acreditava que, utilizando a teoria quântica de Planck, seria possível criar um novo modelo atómico, capaz de explicar a forma como os electrões absorvem e emitem energia radiante. A interpretação de Copenhaga – devido em grande parte a Niels Bohr – continua a ser a formalização da mecânica quântica mais aceite entre os físicos. De acordo com esta interpretação, a natureza probabilística da mecânica quântica não constitui uma característica temporária que poderá ser substituída por uma teoria determinística, mas sim o renunciar definitivo à ideia clássica de “causalidade”.

¹²² *Mathematics and the search for Knowledge*, Morris Kline, Oxford University Press, 1985, p. 240.

¹²³ Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887-1961), Prémio Nobel da Física em 1933, físico austríaco, que desenvolveu um conjunto de resultados fundamentais da teoria quântica, que foram a base da mecânica das ondas. Formulou a equação das ondas (a estacionária e a equação de Schrödinger, dependente do tempo). Schrödinger propôs uma interpretação original do significado físico da função onda, criticando a convencional Interpretação de Copenhaga da mecânica quântica (usando o paradoxo do gato de Schrödinger, propõe uma situação em que a vida ou morte de um gato, que se encontra dentro de uma caixa, depende do estado de uma partícula subatómica; segundo Schrödinger, a interpretação de Copenhaga implica que o gato se encontra simultaneamente vivo e morto (para o universo exterior), enquanto a caixa não for aberta). É autor de várias obras em diversas áreas da Física, tais como: mecânica estatística e termodinâmica, física de dieléctricos, teoria da cor, electrodinâmica, relatividade geral e cosmologia. Tentou construir uma teoria unificadora da física.

¹²⁴ Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984), Prémio Nobel da Física em 1933, físico teórico inglês que teve contribuições fundamentais para a mecânica quântica e para a electrodinâmica quântica. Para além de outras descobertas, formulou a equação de Dirac, que descreve o comportamento de um fermião (o teorema da estatística do spin – de grosso modo associado ao movimento de rotação das partículas – considera que, em qualquer teoria quântica razoavelmente de acordo com a relatividade, as partículas com um spin de número inteiro são bósons e as partículas com spin de número inteiro, adicionado com metade de um spin, são fermiões).

acreditava num regresso ao Determinismo. No entanto, isso resultaria do abandono de uma qualquer ideia básica, algo que não se vislumbra, nesse momento.

O que emerge da observação da relação entre o mundo das ideias (e em particular das fórmulas matemáticas) e o mundo real tem a ver com a forma como entendemos a sua existência, inexistência ou coincidência:

Toda a nossa percepção do mundo exterior de facto ocorre dentro de nós mesmos; assim, a crença em que esta consciência é gerada por objectos externos a nós mesmos pode muito bem ser uma ilusão. [...] Porque a existência de algo que não causa uma percepção sensorial em qualquer ser consciente é impossível de provar experimentalmente, a existência física independente da humanidade deveria ser declarada insignificante; mais do que isso, todos os cientistas deveriam ser idealistas. No entanto, toda a ciência clássica tem-se baseado solidamente na premissa que defende a existência de um universo externo objectivo. Os cientistas estão geralmente de acordo que a natureza não os está a iludir e que a sua concepção dum mundo externo real é justificada.¹²⁵

Em certa medida, o que acontece muitas vezes no ensino da Matemática são aprendizagens de processos computacionais que deveriam ser assimilados como processos mentais, como tomadas de consciência dos conhecimentos implícitos. O facto de os mesmos não serem vividos pelos alunos, cria uma não-existência do que deveria ser um conhecimento fundamental na formação dos indivíduos, a Matemática como existência na consciência individual.

Há até quem considere que a particularidade que distingue a imagem que um matemático tem do mundo, em relação aos demais seres humanos, reside num sexto sentido denominado *imaginação*. Deste facto resulta que a criação matemática não necessita de uma equivalência real, uma vez que não constitui uma existência, mas uma percepção distinta dessa mesmíssima realidade.

Ao contrário dos demais cientistas, que observam a natureza por intermédio de todos os cinco sentidos, os matemáticos usam quase exclusivamente o sentido da imaginação. Isto é, os matemáticos estão tão familiarizados com o sexto sentido (*a imaginação*) como os músicos estão com os sons, os gastrónomos com os paladares e os aromas e os fotógrafos e cineastas com a visão. [...] Através das suas singulares criações, os matemáticos dão-nos informações da realidade sem a intenção, ou a capacidade, de provar que algo existe ou não.¹²⁶

Curiosamente, este “sexto sentido” manifesta-se no desenrolar do trabalho de um matemático, nomeadamente nos momentos de descoberta, nos quais acontece a “inspiração”. Os grandes

¹²⁵ *Mathematics and the search for Knowledge*, Morris Klein, Oxford University Press, 1985, p. 244.

¹²⁶ *Pontes para o Infinito*, Michael Guillen, trad. Jorge da Silva Branco, Gradiva, 1983, p. 13.

matemáticos da história focaram o papel que desempenha o seu *vislumbre*¹²⁷, mas este constitui uma experiência pessoal, quase intransmissível¹²⁸, que difere de matemático para matemático¹²⁹.

No entanto, estes *vislumbres* são rapidamente silenciados e omitidos pela máquina da formalização, tentando anular a forma pouco formal de perceber a realidade que estes implicam. Assim, retira-se a matemática do mundo real e constitui-se um mundo imaginário, depositário do conhecimento, impedindo a compreensão desses *vislumbres* e menorizando quem o tente fazer.

Não há desprezo mais profundo, ou mais intrinsecamente justificável, que aquele que os homens que fazem sentem pelos homens que explicam. A exposição, a crítica, a apreciação, são obra para espíritos de segunda categoria.¹³⁰

Contudo, as ideias matemáticas não se deixam aprisionar pela forma como cada ser humano faz matemática¹³¹. Para além disso, também não se deixam agrilhoar pelos formalismos, que as tentam condicionar:

Esta noção errada (*de que a matemática só pode ser convenientemente expressa em termos de símbolos*) tem conduzido numerosos matemáticos a desdenhar, por fúteis, de todos os esforços para explicar, na linguagem ordinária, os resultados matemáticos, levando igualmente os não matemáticos a perderem a esperança de virem algum dia a compreender a Matemática.¹³²

Esta falácia, repetida sucessivamente, tem como consequência uma tese generalizada de que um matemático não funciona para além desses formalismos:

...Aldous Huxley, no seu livro *Views of Holland*: “Aprendemos que nada é simples e racional, excepto o que nós próprios inventámos; que Deus não pensa como Euclides nem como Riemann.” [...] Huxley e os que pensam como ele não deram atenção à possibilidade de os matemáticos não serem meros inventores de ideias antitéticas das complexidades da vida.¹³³

Com efeito, a própria Matemática não se cumpre no seu formalismo, nem se constitui pelas estruturas naturais mencionadas anteriormente. A Matemática são as interrogações que surgem

¹²⁷ Optou-se pelo termo *vislumbre*, apenas pela maior importância que atribuímos ao sentido da visão.

¹²⁸ *A Formação da Matemática Contemporânea*, Jean Dieudonné, trad. J. H. von Hafe Perez, Publicações Dom Quixote, 1987, p. 177.

¹²⁹ O mesmo acontece com os cientistas em geral:

...o que chamamos satisfação ou maravilhamento é, de facto, um puro êxtase. Põe o cientista em órbita.

in Uma Tarde com o Sr. Feynman, org. A.M. Nunes dos Santos e Christopher Aurretta, Gradiva, 1991, p. 102.

¹³⁰ *Apologia de um Matemático*, G. H. Hardy, trad. Daniela Kato, Gradiva, 1940, p. 55.

¹³¹ *Aquando da sua admissão como académico [...] na Universidade de Gotinga, Riemann apresentou um trabalho [...] altamente técnico [...] sem nele incluir uma única equação. A sua oração teve um êxito retumbante.*

in Pontes para o Infinito, Michael Guillen, trad. Jorge da Silva Branco, Gradiva, 1983, p. 14.

¹³² *Pontes para o Infinito*, Michael Guillen, trad. Jorge da Silva Branco, Gradiva, 1983, pp. 13 e 14.

¹³³ *Ibid.*, p. 15.

constantemente e os esforços formais e informais para responder a essas interrogações e descobrir novas estruturas naturais.

A Matemática não é sobre símbolos e contas. [...]...é sobre a forma como diferentes ideias se relacionam entre si. [...] Não é só uma questão de obter a resposta certa; [...]...importa perceber porque uma resposta é de todo possível e porque tem determinada forma.¹³⁴

Dessa contenda, resultam reorganizações mais ou menos profundas, que determinam novas estruturas, mais sólidas e abrangentes.

...há muitas transferências [...] de ideias que provêm da álgebra, ou da análise, ou da teoria dos números. Ilustram o carácter dominante da matemática actual [...], a sua unidade.¹³⁵

Dos factos, atrás enunciados, torna-se evidente que o formalismo gravita em torno das ideias matemáticas, como uma nuvem de satélites, impedindo, muitas vezes, a observação e compreensão das mesmas por outras perspectivas, associadas a outras formas de expressão, com o receio obcecado de perder a sua inatacável presença junto das ideias matemáticas, qual Gollum e o seu anel.

A Matemática resulta do debate em torno de um *texto*¹³⁶, constituído por fórmulas, que não constitui algo definitivo. A Matemática não se restringe à reformulação incessante desse *texto*. São necessárias outras expressões para a compreensão dos matemáticos humanos, autores¹³⁷ ou leitores¹³⁸:

...nos textos matemáticos há uma tensão permanente: a necessidade de ser rigoroso empurra para um estilo formalizado, enquanto a necessidade de se ser compreendido empurra para uma exposição informal que usa as possibilidades de expressão de uma língua natural. [...] A transmissão eficiente da Matemática aos seres humanos depende de uma escolha feliz do que se exprime em fórmulas e do que se exprime com palavras. [...]...o pensamento matemático não se baseia necessariamente na linguagem. Os conceitos podem ser não-verbais, associados a elementos vagos de natureza visual, auditiva ou muscular.¹³⁹

¹³⁴ *Problemas da Matemática*, Ian Stewart, trad. Miguel Urbano, Gradiva, 1987, p. 14.

¹³⁵ *A Formação da Matemática Contemporânea*, Jean Dieudonné, trad. J. H. von Hafe Perez, Publicações Dom Quixote, 1987, p. 180.

¹³⁶ *...Texto é esse espaço social que não deixa nenhuma linguagem a coberto, exterior, nem qualquer sujeito da enunciação na situação de juiz, de mestre, de analista, de confessor, de decifrador: a teoria do texto não pode coincidir senão com uma prática da escrita.*

in *O Rumor da Língua*, Roland Barthes, Edições 70, 1984, p. 61.

¹³⁷ *Por um lado, o autor quer usar as suas próprias palavras, quer ser mestre de um estilo pessoal; por outro, a narrativa tende a aproximar-se das suas personagens e dos seus hábitos linguísticos.*

in *A Mecânica da Ficção*, James Wood, Quetzal, 2008, p. 46.

¹³⁸ *...este retorno (às origens), que faz parte do próprio discurso e que incessantemente o modifica, não é um suplemento histórico que venha acrescentar-se à própria discursividade, reduplicando-a com um ornamento não essencial; é um trabalho efectivo e necessário de transformação da própria discursividade.*

in *O que é um autor?*, Michel Foucault, Vega, 1969, pp. 65 e 66.

¹³⁹ *O Cérebro dos Matemáticos*, David Ruelle, trad. Edgar Rocha, Gradiva, 2007, pp. 22, 23, 24, 99 e 151.

Esta escolha feliz passa necessariamente por deixarmos que a realidade contamine o nosso *vislumbre* matemático, recusando qualquer tipo de cegueira ou surdez, mas mantendo a nossa percepção matemática ágil e disponível para saltos exteriores às estruturas que já nos sustentam, mas que poderão ser entrave à descoberta de outras mais extraordinárias, se nos agarrarmos a elas em demasia.

2.2 Elementos de epistemologia da narrativa.

Começemos por explorar de que forma se relaciona a estética matemática com a estética narrativa:

...o bom gosto matemático consiste em utilizar inteligentemente os conceitos e os resultados disponíveis na cultura matemática que nos rodeia para obter a solução de problemas novos. A cultura evolui porque os seus conceitos-chave se alteram lenta ou brutalmente e são substituídos por novos faróis matemáticos. [...] na Matemática, como na arte, a paisagem muda.¹⁴⁰

A beleza também é um critério noutras ciências, apesar de, com efeito, os resultados nestas ciências terem de estar de acordo com os fenómenos observados. Por exemplo, Paul Dirac, quando questionado sobre as características fundamentais das fórmulas da Física, numa conferência na Universidade de Moscovo, escreveu:

*“As leis da Física devem ter beleza matemática”*¹⁴¹

Esta frase foi preservada e ainda se mantém no mesmo local.

Encontramos então semelhanças entre a ciência (e em particular a Matemática) e a arte, uma vez que também a arte depende da criatividade e estética dos homens. Jorge Luís Borges explicita esta dependência, nomeadamente em relação à narrativa, referindo Croce¹⁴² e a sua ideia de negação dos géneros literários – novelas, alegorias, ou outros – e afirmação dos indivíduos:

Ao que conviria logicamente acrescentar que, ainda que todos os indivíduos sejam reais, determiná-los com precisão é generalizá-los (porque é criado um termo de comparação, um modelo). Por conseguinte, esta minha afirmação é uma generalização e não deve ser permitida.¹⁴³

¹⁴⁰ *O Cérebro dos Matemáticos*, David Ruelle, trad. Edgar Rocha, Gradiva, 2007, pp. 156-157.

¹⁴¹ *Tributes to Paul Dirac*, Adam Hilger, J.H. Taylor – Bristol I.O.P. Publishing, 1987, p. 20.

¹⁴² Benedetto Croce (1866-1952), filósofo italiano e político ocasional. Dedicou-se à escrita de diversos tópicos, nomeadamente filosofia, história, metodologia da narrativa histórica e estética.

One of Croce's most distinctive and most controversial doctrines is his denial of the genres both as principles of composition and as critical or historical categories. For him, genres are not separate forms of expression and works of literature are not to be evaluated according to their genres, but to be judged singly as individual expressions.

in *Benedetto Croce: Philosopher of Art and Literary Critic*, Gian N. G. Orsini, Southern Illinois University Press, 1961, p. 96.

¹⁴³ *Borges Oral*, Jorge Luís Borges, Vega, 1978, pp. 62 e 63.

Constitui, portanto, elemento essencial de uma actividade criativa a personificação do conhecimento, a individualidade que assimila e que se consciencializa do fenómeno estético:

Pensar é generalizar e temos necessidade desses úteis arquétipos platónicos para poder afirmar o que quer que seja. [...] O fenómeno estético exige a conjunção do leitor e do texto para poder existir. [...] A sua existência começa quando um leitor o abre (o livro). Ocorre então o fenómeno estético, que pode parecer-se com o momento em que o livro foi engendrado.¹⁴⁴

Este dado releva, na medida em que consubstancia que, não sendo errado generalizar e estabelecer regras, teoremas, ou quaisquer outras propriedades genéricas da matemática, deve ser compreendido que na sua base estão axiomas – que poderão não ser eternos, à luz da perspectiva histórica da linguagem matemática, explanada no subcapítulo anterior – bem como uma necessária interiorização consciente por parte de cada ser humano.

Esta questão torna-se relevante na análise da narrativa, na medida em que o Homem se move na temporalidade, que por sua vez tem uma relação de reciprocidade com a narrativa:

De facto, tomo a temporalidade como a estrutura da existência que alcança a sua expressão na narrativa, sendo a narrativa a estrutura da linguagem que tem a temporalidade como o seu referente último.”¹⁴⁵

A narratividade pode manifestar-se em *textos*, dependentes de diversos sistemas simbólicos. Para além dos *textos* narrativos verbais, existem também os não-verbais – na pintura, escultura, na mímica, na dança, no cinema mudo, etc. –, bem como os parcialmente verbais – como o cinema falado, a ópera, etc.. Em qualquer das situações, representam eventos, que constituem a passagem de um estado a outro estado, que se sucedem com uma determinada temporalidade, de agentes antropomórficos ou não, individuais ou colectivos, situados num espaço empírico ou possível. Dentro dos *textos* narrativos, os elaborados de forma artificial constituem textos particularmente interessantes, na medida em que são produzidos em contextos pré-determinados de enunciação, com uma intencionalidade alheia à interacção comunicativa estabelecida, e em conformidade com normas e convenções definidas nos vários códigos específicos.

Concretizando de forma mais profunda, constitui-se como pertinente a multiplicidade de *textos* que pode ser formada em torno de um determinado conceito. Na obra *Exercícios de Estilo*, de Raymond Queneau¹⁴⁶, pautada por noventa e nove diferentes perspectivas literárias (e não só) de uma

¹⁴⁴ *Ibid.*

¹⁴⁵ “Narrative Time”, Paul Ricoeur, in *Critical Inquiry*, 7, 1(1980), p.169.

¹⁴⁶ Raymond Queneau (1903-1976), escritor, poeta e co-fundador de *Ouvroir de littérature potentielle* (Oulipo). Antes de fundar o Oulipo em 1960, Queneau sentiu-se atraído pela matemática como fonte de inspiração. Tornou-se membro da *Société Mathématique de France* em 1948. Na ideia de Queneau, os elementos de um texto, incluindo detalhes triviais como o número dos capítulos, seriam aspectos que teriam de ser pré-determinados, talvez até calculados. Uma obra tardia, *Les fondements de la littérature d'après David Hilbert* (1976), aludindo ao matemático David Hilbert, tenta explorar os fundamentos da literatura por derivações quasi-

situação banal, espelha-se um mostruário das diferentes formas de observar ou recriar a realidade, como não poderia deixar de acontecer com um dos fundadores do “Oulipo”¹⁴⁷:

A estrutura é liberdade, produz o texto e ao mesmo tempo a possibilidade de todos os textos virtuais que possam substituí-lo. É esta a novidade que está na ideia da multiplicidade “potencial” implícita na proposta de uma literatura que nasça das constrições que ela mesma escolhe e se impõe.¹⁴⁸

Tendo em conta o que foi mencionado, apresenta-se aos nossos olhos uma narratividade que se constitui como máquina de produção de uma multiplicidade expressiva, que revisita as suas próprias problemáticas – como vimos anteriormente – e se renova, tornando-se imagem de uma qualquer realidade, em particular a matemática.

A procura por uma linguagem ideal é provavelmente fútil. O problema da formalização é a construção de linguagens artificiais adequadas aos problemas individuais.^{149,150}

Para a construção de narrativas artificiais, a pesquisa sobre modelação matemática, alguma conduzida nas áreas de educação matemática e de matemática aplicada, fornece algum contexto para o estudo da utilidade dos modelos narratológicos. Na resolução de problemas matemáticos através da modelação¹⁵¹, está envolvido um ciclo de quatro passos¹⁵²:

- (a) elaborar uma descrição que estabelece um mapa do modelo do mundo a partir do mundo real (ou imaginado);
- (b) manipulação do modelo de forma a gerar previsões ou acções, relacionadas com a resolução do problema original;
- (c) translação dos resultados relevantes obtidos no modelo para o mundo real (ou imaginado);
- (d) verificação da utilidade das acções ou previsões.

matemáticas de axiomas textuais. *Exercícios de Estilo* conta a história simples de um homem que encontra um estranho em duas ocasiões no mesmo dia de noventa e nove formas diferentes, demonstrando a tremenda variedade de estilos que podem ser escolhidos para construir uma narrativa.

¹⁴⁷ Inspirado no “Collège de Pataphysique” – associação que utilizava a linguagem científica para “fabricar” ciência impossível e absurda (patafísica é a “ciência das soluções imaginárias”) – Raymond Queneau fundou o já referido “Oulipo” com François Le Lionnais (1901-1984), matemático e xadrezista francês.

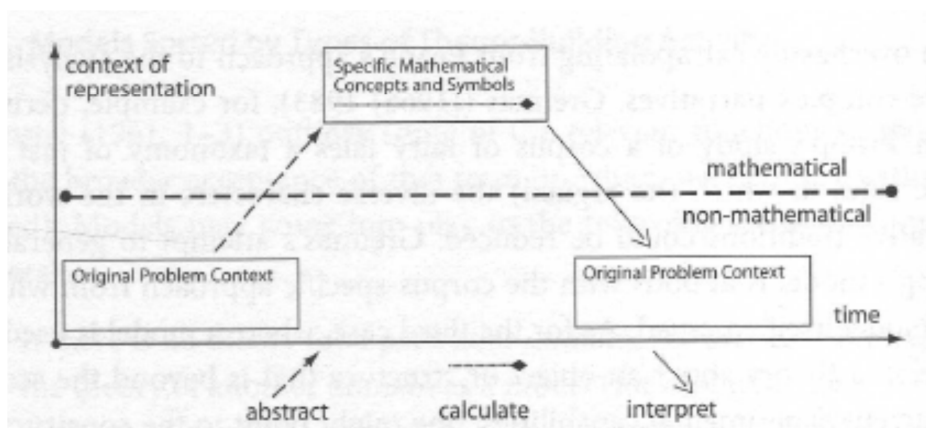
¹⁴⁸ *Porquê ler os Clássicos*, Italo Calvino, Teorema, 1994, pp. 256 e 257.

¹⁴⁹ “On Formalization”, Hao Wang, in *Mind* 64 (nova série): 226-228, 1955.

¹⁵⁰ “Formal Models in Narrative Analysis”, David Herman, in *Circles Disturbed – the Interplay of Mathematics and Narrative*, orgs. Barry Mazur e Apostolos Doxiadis, Princeton University Press, 2012, p. 447.

¹⁵¹ “A Semiotic Look at Modeling Behaviour.”, Paul E. Kehle e Frank K. Lester, in *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching*, ed. Richard Lesh e Helen M. Doerr, 87-122, 2003.

¹⁵² “Foundations of a Models and Modeling Perspectives on Mathematics Teaching, Learning and Problem Solving.”, Richard Lesh e Helen M. Doerr, in *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching*, ed. Richard Lesh e Helen M. Doerr, 3-33, 2003.



Os modelos de estrutura narrativa, que envolvem representações icônicas ou simbólicas, podem ser inseridos num ciclo de modelação similar. Observe-se, por exemplo, parte da análise dos locais de mobilidade de Labov¹⁵³, definidos como locais, no texto, para onde algumas orações podem ser realocadas, sem afectarem a interpretação da narrativa. Para Labov, existem orações que não podem ser movidas, sem afectar o significado do texto, outras que ele considera livres, podendo ser colocadas em qualquer ponto da narrativa e outras, chamadas orações restritas, de mobilidade condicionada. Para determinar os locais possíveis para realizar as deslocações dentro das narrativas, o analista terá de seguir o primeiro passo do ciclo anteriormente descrito, elaborando uma descrição narrativa do conceito que pretende. Como equacionar a utilização dos três passos restantes constitui a questão fulcral. Para os usar, os teóricos teriam de verificar experimentalmente qual o rigor com que os locais de mobilidade propostos mantinham a interpretação dos destinatários da narrativa. Algumas franjas da investigação nesta área já se iniciaram procurando, ao invés de construir modelos ou testar os modelos, correlacionar as características do texto implementado com o efeito produzido na sua leitura e interpretação. No entanto, ainda não existe uma concordância, entre os investigadores nesta área, de quais as estratégias a adoptar na utilização das etapas de manipulação, translação e verificação.

Assim, se bem que os modelos se mantenham distintos das teorias ou conceitos modelados¹⁵⁴, podem ser utilizados na sua construção¹⁵⁵. Black¹⁵⁶ distingue os modelos¹⁵⁷, com fins de construção teórica, de outros, nomeadamente:

¹⁵³ "The Transformation of Experience in Narrative Syntax" in *Language in the Inner City*, William Labov, University of Pennsylvania Press, 1972.

¹⁵⁴ "Towards the Formal Study of Models in the Non-Formal Sciences", Leo Apostel, in *The Concept and Role of the Model in Mathematics and Natural and Social Sciences*, ed. Hans Freudenthal, 1-37, 1961.

¹⁵⁵ "Models in Science", Roman Frigg e Stephan Hartmann, in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, ed. Edward N. Zalta, Spring Edition, 2006; "Models for, of, and in Literary Narrative, Literary Narrativ(e)ity as a Model: Disentangling the Web", Uri Margolin, in *Semiotica* 128 (1/2): 167-85, 2000; "Diagramming Narrative", Marie-Laure Ryan, in *Semiotica* 165 (1/4): 11-40, 2007; *Diagrammatology: An Investigation on the Borderlines of Phenomenology, Ontology, and Semiotics*, Frederik Stjernfelt, Springer-Verlag, 2007.

Modelos de Escala – mantêm uma relação de semelhança entre o modelo e o objecto, sistemas ou processos, reais ou imaginados, que pretendem simular.

Modelos de Analogia – constituem-se como um objecto, sistema ou processo que procura reproduzir, de forma fiel, mas num novo contexto, a estrutura ou teia de relações do elemento original. (para Black, os modelos matemáticos de processos físicos constituem um subtipo de modelos análogos.)

Modelos Teóricos – quer sejam reais ou fictícios, não são literalmente construídos (como os de escala ou de analogia): o âmago do método consiste num diálogo constante entre o modelo e o seu objecto.

Arquétipos – são modelos implícitos ou subliminares, actuando no seio de um dado discurso. São um reportório sistemático de ideias, através do qual é descrito, por extensão analógica, um domínio ao qual essas ideias não seriam imediatamente e literalmente aplicáveis.

Os sistemas de criação de histórias¹⁵⁸ podem ser vistos como modelos de escala para capacidades e competências, que permitem aos seres humanos produzir e compreender os mecanismos narrativos. Estes sistemas também podem ser utilizados como uma estratégia de investigação, que transforme modelos de analogia iniciais, em modelos teóricos produzindo, eventualmente, uma nova teoria. Ao desenvolver os sistemas de criação de histórias, os analistas procuram progredir de um modelo das relações entre os diversos elementos de uma história, para a construção de modelos que possam explicar e prever, captando algoritmicamente, o processo através do qual os elementos de uma história são configurados numa narrativa. Os arquétipos também são relevantes neste contexto, uma vez que uma forma de perceber os méritos de uma narratologia carregada de cientificidade, seria identificar conceitos pertinentes, figuras de estilo, e outras características do discurso dos teóricos da narrativa. Pode ser argumentado que a própria narrativa constitui um arquétipo do discurso matemático e científico, na medida em que os cientistas estendem usualmente o termo *história*, cobrindo procedimentos derivacionais ou processos físicos que não são, estritamente falando, estruturados narrativamente.

Comparar modelos formais diferentes em narratologia, constitui uma estratégia argumentativa básica. Esta prática sugere que os académicos da narrativa não se limitam a multiplicar nomenclaturas descritivas, criando diversas aproximações analógicas da estrutura das histórias, mas procuram antes desenhar comparações pertinentes entre esquemas explicativos mais ou menos escolhidos. No entanto, em parte pela multiplicidade de disciplinas que contribuem para a empresa do questionamento

¹⁵⁶ Max Black (1909-1988), filósofo anglo-americano, de grande relevo na filosofia analítica da primeira metade do século vinte. Fez relevantes contributos para a filosofia da linguagem, para a filosofia da matemática e da ciência, para a filosofia da arte e também publicou estudos da obra de Frege.

¹⁵⁷ “Models and Archetypes”, Max Black, in *Models and Metaphors: Studies in Language and Philosophy*, 219-43, Cornell University Press, 1962.

¹⁵⁸ “Narratological Knowledge for Natural Language Generation”, Birte Lönnecker, in *Proceedings of the 10th European Workshop on Natural Language Generation (ENLG 2005)*, ed. Graham Wilcock, Kristiina Jokinen, Chris Mellish, e Ehud Reiter, 91-100, 8-10 Agosto 2005.

narrativo, em parte pelos diferentes objectivos analíticos associados a essas disciplinas, poderíamos ser pressionados a encontrar uma métrica consensual para determinar o poder teórico (explanatório e preditivo) inerente a um dado modelo. Ao invés, os teóricos operam com mais ou menos critérios tácitos para determinar a boa correspondência entre modelos narratológicos e fenómenos narrativos, entre o narrado e o que se pretende narrar. Enunciar os critérios relevantes é uma tarefa para a metanarratologia, concebida como uma explicação dos princípios subjacentes ao estudo da narrativa.

David Herman¹⁵⁹ apresenta uma sugestão¹⁶⁰ para a forma como os analistas da narrativa podem alterar a sua perspectiva clássica da narrativa para uma noção unificada de processos construtivos ou conceptuais e seus reflexos na narrativa. Segundo ele, essas operações construtivistas, inerentes à organização do discurso narrativo, são formatadas, não só pelos factores relativos à perspectiva ou ponto de vista, mas também pelos factores temporal, espacial, afectivo, bem como outros factores que dão corpo à experiência humana.

A ideia básica por detrás dessa conceptualização ou construção é que a mesma situação ou evento pode estar linguisticamente codificada de diferentes formas, através de locuções que são verosimilhantes, apesar dos seus formatos notoriamente diferentes¹⁶¹. Langacker¹⁶² sugere que um leque de capacidades cognitivas, incluindo a comparação, a utilização da imaginação, a transformação de uma construção noutra ou noutras, e o ajustamento focal (centrado num indivíduo, ou sem uma identificada localização da perspectiva), suporta os processos de conceptualização da narrativa. Por outras palavras, estas capacidades cognitivas constituem parâmetros para a elaboração da linguagem. Um subconjunto dos parâmetros em questão – nomeadamente associados ao ajustamento focal – deriva do facto condicionante de existir, incorporada na narrativa, uma perspectiva espaço-temporal dos acontecimentos.

Com uma identificação dos processos e sub-processos envolvidos na construção narrativa, os analistas podem explorar a forma como as narrativas podem representar cenas ou estruturas de

¹⁵⁹ “Formal Models in Narrative Analysis”, David Herman, in *Circles Disturbed – the Interplay of Mathematics and Narrative*, orgs. Barry Mazur e Apostolos Doxiadis, Princeton University Press, 2012, p. 471.

¹⁶⁰ *Foundations of Cognitive Grammar*, Ronald W. Langacker, vol. 1, Stanford University Press, 1987; *Toward a Cognitive Semantics*, Leonard Talmy, vol. 1 e 2, MIT Press, 2000.

¹⁶¹ *Cognitive Linguistics*, William Croft e D.A. Cruse, Cambridge University Press, 2004.

¹⁶² Ronald Wayne Langacker (n. 1942), linguista americano. Conhecido por ser um dos fundadores do movimento da linguística cognitiva e criador da gramática cognitiva. Langacker desenvolve as suas ideias centrais sobre gramática cognitiva na obra *Foundations of Cognitive Grammar*, (1987). A gramática cognitiva consiste em parâmetros que determinam como as unidades básicas da linguagem – símbolos ou emparelhamentos convencionais de uma estrutura semântica com a sua marca fonológica – podem ser combinadas para gerar frases maiores, que também constituem um par semântico-fonológico. Os aspectos semânticos são modelados por estruturas recorrentes dos nossos processos cognitivos que estabelecem padrões de compreensão e raciocínio, formados pelas nossas interacções sensoriais com o meio, experiência linguística e contexto histórico. Devido à ligação íntima semântico-fonológica, cada um dos membros do par pode invocar o outro. Ao contrário de muitas teorias linguísticas, a gramática cognitiva estende a noção de unidades simbólicas à própria gramática das linguagens.

acontecimentos relativamente estáticos (sinóticos) ou dinâmicos (sequenciais). Estas terão uma focalização relativamente mais lata ou estrita, participantes focais e elementos secundários, diferentes graus de *granularidade*¹⁶³, e uma definição mais ou menos objectiva (determinante da maior ou menor capacidade de previsão). As cenas de uma narrativa também podem decorrer de uma observação realizada de diferentes pontos espaço-temporais e os pontos de vista sobre esta podem ser distais (com um narrador externo), mediais (onde existe uma mediação do narrador) ou proximais (com envolvimento do narrador no que é narrado). A cada um destes incrementos na distância entre o narrador e o narrado poderá corresponder um determinado grau de *granularidade* na construção narrativa.

Assim, a metanarratologia estuda as formas de conhecimento necessárias para o debate da melhor forma de estudar ou criar uma determinada narrativa.

Devem ser objecto de análise atenta alguns princípios relevantes, enunciados por David Herman, que podem suscitar o questionamento da natureza e funções dos modelos formais na análise narrativa, nomeadamente:

- Quando se modela os aspectos da estrutura narrativa, deve-se adoptar inicialmente uma postura aberta em relação à variedade de estratégias de modulação existentes. Aguardando pela criação de uma massa crítica de incompatibilidades, emergente do confronto entre as diferentes estratégias, podemos obter, a partir delas, a base para a construção de uma teoria.
- Quando se encontra um “dilema de abordagens em conflito”, devemos buscar outros domínios como fonte de novos modelos que poderão gerar novas questões para pesquisa ou novas formas de abordar os problemas em causa.
- Ao construir modelos de narrativa, deve-se permitir não só tipos de modelação hierarquizantes e probabilísticos, bem como binários e determinísticos.
- Ao modelar a narrativa, dar prioridade aos processos de inferência em detrimento de interpretações adquiridas.
- Finalmente, na pesquisa narrativa, os teóricos devem considerar reflexivamente os tipos de *texto* no qual as suas estratégias de modelação são baseadas, permanecendo centrados nos limites e possibilidades dessas estratégias para um dado propósito analítico.

Como vimos anteriormente, a estética está intimamente ligada à matemática e à narrativa. A narrativa pode ser entendida como uma expressão individual que resulta num evento temporal. A sucessão desses eventos estabelece uma temporalidade que, por sua vez, constitui um catalisador da criação narrativa, nascida das distintas interpretações que cada leitor lhe dá.

¹⁶³ Transparência ou explicitação.

Por outro lado, a matemática evolui como resultado das tentativas individuais de ultrapassar determinado problema. Essa possível solução deve fundamentar-se nos instrumentos já disponíveis, mas pode exigir o estabelecer de uma nova relação, resultante de uma mudança de perspectiva. Para que esses conceitos matemáticos sejam assimiláveis, torna-se necessário a criação de narrativas adequadas aos parâmetros que definem o eventual leitor – o que conhece de externo e de interno ao formalismo vigente nesse momento histórico da linguagem matemática.

Assim, a utilização de modelos narratológicos para a criação de histórias que ilustrem cabalmente um conceito matemático, resultam da análise de factores múltiplos (culturais, linguísticos, emocionais). O estudo das suas relações com a modelação matemática pode contribuir para o aperfeiçoamento dessa construção.

2.3 Pontos de contacto entre matemática e narrativa.

Tem sido realizada investigação, a propósito da comunicação e redefinição das áreas do conhecimento científico, patentes nas obras, por exemplo, de Peter Galison^{164,165}. Este autor demonstra como a Ciência, na prática, é composta por muitas ciências, constituindo um caleidoscópio de várias partes, em constante recomposição, cada uma com a sua linguagem e convenções, interligadas, mas não hierarquizadas (como um anel, não como uma pirâmide), até porque as áreas do conhecimento científico mais estabelecidas nem sempre o foram, permanecendo essa constante redefinição (isto apesar de concordar com Thomas Kuhn na forma como os paradigmas vigentes influenciam as observações que se fazem e os aspectos da realidade aos quais é dada maior importância). Nas últimas décadas essa aproximação ou a plasticidade das fronteiras entre ciência e arte – e, em particular, a narrativa – também tem aumentado. Assim, não constitui facto estranho o

¹⁶⁴ Peter Louis Galison (nascido em 1955), historiador da ciência e físico, foi Professor na Universidade de Stanford e é professor da Universidade de Harvard. Doutorado em Física e em História da Ciência pela Universidade de Harvard (1983). Os seus estudos incluem o trabalho pioneiro de aplicação da noção antropológica de “trading zones” à prática científica.

¹⁶⁵ Na obra *The Disunity of science: boundaries, contexts, and power*, (Peter Galison, David J. Stump – 1996), inspirado pela análise da *Estrutura das Revoluções Científicas* de Thomas Kuhn, Galison mostra como, apesar da incomensurabilidade entre paradigmas, não resulta daí uma incomunicabilidade de conceitos – dentro da mesma área ou entre duas áreas distintas do conhecimento científico. Mesmo quando se tratam de distintas interpretações dos mesmos fenómenos ou conceitos, em diferentes paradigmas.

“...I have been calling a “trading zone”, an arena in which radically different activities could be locally, but not globally, coordinated. [...] During and shortly after World War II, nuclear-weapons builders created a mode of inquiry to address problems too complex for theory and too remote from laboratory materials for experiment. Christened “Monte Carlo” after the gambling mecca, the method amounted to the use of random numbers [...] to simulate the stochastic processes too complex to calculate in full analytic glory. [...] Pure Mathematician, Applied Mathematician, Physicist, bomb builder, statistician, numerical analyst, industrial chemist, numerical meteorologist, and fluid dynamicist: each has a view about what the Monte Carlo was.” in “Computer simulations and the Trading Zone”, Peter Galison, *The Disunity of Science - Boundaries, Contexts, and Power*, Ed. Peter Galison e David J. Stump, Stanford University Press, 1996, pp. 119 e 151.

progressivo interesse e relevância do estudo do funcionamento dessas fronteiras e de que forma podem ser utilizadas para o desenvolvimento de áreas vizinhas.

Considere-se o caso da retórica e da demonstração matemática. Apostolos Doxiadis¹⁶⁶ defende que existe uma similaridade entre as duas, independentemente da retórica se mover nas ambiguidades da linguagem corrente e de premissas probabilísticas, e da matemática se basear em certezas absolutas, usando uma linguagem restrita e claramente definida¹⁶⁷. Destaque-se que, neste contexto, entende-se que todas as histórias são narrativas, mas nem todas as narrativas são histórias (narrativa constitui um conceito mais lato). Da sua análise, Doxiadis retira um conjunto importante de conclusões. Por exemplo, a demonstração matemática utiliza os mesmos três tipos de elementos primários que todas as narrativas: afirmações de acção (ex.: derivando a expressão analítica da função), afirmações de identificação de propriedades (ex.: conclui-se que as duas funções são isomórficas) e afirmações gerais (ex: Aplicamos então o teorema que afirma que esse isomorfismo é válido para todas as funções dessa família). No entanto, o peso percentual desses diferentes tipos de afirmações nas demonstrações matemáticas não se manifesta do mesmo modo noutras narrativas, nem tão-pouco entre teoremas ou partes de teorema distintos, conforme nos encontramos numa parte de construção ou de conclusão na demonstração. Mais do que isso, apesar das “verdades” matemáticas demonstradas serem absolutas, o encadeamento lógico inerente nem sempre o é. Colocando esta questão matematicamente, nem todas as condições necessárias são suficientes. Neste aspecto, o encadeamento dedutivo mostra-se similar ao encadeamento causal, o seu equivalente no mundo da narrativa, na forma e na estrutura em que se apresenta. O psicólogo Jerome Bruner¹⁶⁸, um dos

¹⁶⁶ Apostolos K. Doxiadis (n. 1953), escritor grego. Reconhecido pelas obras *O Tio Petros e a Conjectura de Goldbach* (2000) – recebeu o louvor, entre outros, do laureado com o prémio Nobel John Nash, do matemático britânico Sir Michael Atiyah, do crítico e filósofo George Steiner e do psiquiatra Oliver Sacks -, publicada em mais de trinta e cinco línguas, e por *Logicomix* (2009), tendo por co-autor o cientista computacional Christos Papadimitriou, publicado em mais de vinte línguas. Apesar dos seus primeiros interesses serem a poesia, a ficção e o teatro, um interesse intenso na matemática levou-o a deixar a escola aos quinze anos, para se matricular na Universidade de Columbia, em Nova Iorque, tendo obtido o bacharelato em matemática em 1972. De seguida, matriculou-se na École Pratique des Hautes Études, em Paris, onde obteve o grau de mestre, com uma tese sobre a modelação matemática do sistema nervoso. Doxiadis tem tido interesse na lógica, na psicologia cognitiva e na retórica, bem como no estudo teórico da narrativa. Os trabalhos mais recentes levaram-no a formular uma teoria sobre o desenvolvimento da demonstração dedutiva na Grécia Clássica, enfatizando as influências de padrões pré-existent na narrativa e, especialmente, na poesia da Época Arcaica.

¹⁶⁷ “The Geometry of Gettysburg – Abraham Lincoln’s Rethoric and Euclid’s Method of Demonstration”, <<https://www.youtube.com/watch?v=hpIBYSQWvNk>>, 4 de Janeiro de 2015.

¹⁶⁸ Jerome Seymour Bruner (n. 1915), psicólogo que contribuiu significativamente para a psicologia cognitiva humana e para a teoria da aprendizagem cognitiva na psicologia educacional, bem como para a história e filosofia da educação. Desenvolveu uma teoria da construção narrativa da realidade, que culminou em várias publicações fundacionais. A sua obra *Actual Minds, Possible Words* foi citada em mais de 16100 publicações académicas sendo, também por isso, uma das mais influentes do século vinte. De acordo com Bruner, a ciência cognitiva centrou-se em demasia nos aspectos lógicos e sistemáticos da vida mental – processos mentais usados para resolver puzzles, testar hipóteses e propor explicações. Existe, obviamente, outro lado da vida mental – um lado dedicado ao irreprimível acto humano da imaginação, que permite tornar uma experiência significativa. Este constitui o lado da mente que conduz a boas histórias, romances absorventes, mitos e rituais primitivos e

pioneiros das recentes abordagens multidisciplinares do estudo da narrativa, afirmou que a narrativa constitui uma forma cognitiva distinta, irreduzível a qualquer bateria de práticas observacionais, indutivas ou dedutivas, usualmente consideradas raciocínio lógico ou científico. Doxiadis clarifica que a impossibilidade de uma redução completa não exclui a existência de similitudes estruturais e géneses comuns, nem torna desnecessário o estudo do longo processo de transformação cultural, das raízes narrativas até à sua descendente demonstração lógica.

O estudo sistemático das múltiplas relações entre a narrativa (especialmente a ficcional) e a matemática (incluindo a lógica formal) está ainda nos primórdios. Uri Margolin¹⁶⁹ identifica seis áreas de contacto significativo ou comparação significativa entre as duas actividades¹⁷⁰.

1 - Retrato, numa narrativa literária, do destino de um matemático, real ou ficcionado, como função dos seus projectos intelectuais.

Nesta área de contacto, tanto os aspectos pessoais e interpessoais da vida da personagem são influenciados decisivamente pela sua luta criativa e os resultados obtidos, sendo a personagem em si invariavelmente caracterizada como um indivíduo excepcional que, dependendo do período, pode ser um génio visionário e incompreendido, um arauto da razão e uma grande ajuda para a sociedade, uma personalidade obsessiva, um excêntrico, quase demente, etc..

A ênfase não está na matemática, mas na percepção artística do seu criador e do processo criativo. As especificidades matemáticas poderão ser substituídas por qualquer outro conteúdo intelectual – científico, filosófico, tecnológico, ou até artístico (música, arte visual, arquitectura) – sem grandes alterações ao fio condutor da história. Um bom exemplo será *Uma Mente Brilhante*, filme de 2001 que retrata a vida do matemático John Forbes Nash, *The Man Who Knew Infinity: A Life of the Genius Ramanujan*, de Robert Kanigel, de 1992, que acompanha a vida de Ramanujan¹⁷¹,

descrições históricas plausíveis. Bruner chama-lhe “modo narrativo”, tendo a sua obra contribuído com importantes avanços na procura da sua natureza.

¹⁶⁹ Uri Margolin, professor emérito de literatura comparada, com especialização em teoria da literatura na Universidade de Alberta, em Edmonton, Canadá. As suas áreas de investigação incluem narratologia (abordagens estruturalista, cognitiva e filosófica), metodologia geral e meta teoria, bem como formalismo eslávico, Estruturalismo e semiótica. As suas publicações incluem perto de setenta itens em volumes colectivos, enciclopédias, jornais profissionais internacionais. Margolin foi bolseiro Alexander von Humbolt nas universidades de Konstanz e Freiburg, na Alemanha, durante três anos.

¹⁷⁰ “Matemática e Narrativa: Uma Perspectiva Narratológica”, Uri Margolin, in *Circles Disturbed – the Interplay of Mathematics and Narrative*, orgs. Barry Mazur e Apostolos Doxiadis, Princeton University Press, 2012, pp. 480-507.

¹⁷¹ Srinivasa Ramanujan (1887-1920), matemático indiano autodidacta. Fez contribuições importantes na análise matemática, na teoria dos números, nas series infinitas e nas fracções contínuas, com quase nenhum treino formal em matemática pura.

matemático indiano, ou *N is a number: a Portrait of Paul Erdős*¹⁷², que narra a vida do matemático Paul Erdős¹⁷³.

2 – Uso de um elemento matemático (código, enigma, fórmula, padrão geométrico) como elemento-chave no desenvolvimento e acção da história.

Estes elementos incluem enigmas ou problemas a solucionar, mensagens para decodificar, puzzles para resolver, movimentos de xadrez a executar, padrões geométricos a identificar, a traçar, a seguir ou a completar. Também podem envolver questões ou paradoxos lógicos. As soluções desses elementos podem ser uma personagem da história ou o próprio leitor descobrindo, dessa forma, a lógica de determinadas inflexões no argumento da história. Constitui um bom exemplo destas narrativas *O Castelo dos Destinos Cruzados*, de Italo Calvino, que joga com a multiplicidade de interpretações possíveis dum fenómeno de extracção aleatório, constituído pelo retirar de cartas de um baralho de tarot e o estabelecer, com a geometria da sua distribuição na mesa, de relações entre as diversas personagens:

Apliquei-me sobretudo a observar as cartas de Tarot com atenção, com olhos de quem não sabe o que sejam, e a extrair delas sugestões e associações, a interpretá-las de acordo com uma iconologia imaginária.¹⁷⁴

3 – Uso de fórmulas geométricas ou numéricas, processos ou padrões para determinar a composição ou arquitectura de uma narrativa, e a sua ocasional predominância sobre factores miméticos ou temáticos.

Podem-se distinguir dois tipos de arquitectura. O primeiro, estático, global, em que a totalidade da configuração dos elementos da história é definida no início e mantida por todo o texto. *Flatland*, de Edwin A. Abbott¹⁷⁵, obra original de 1884, estabelece uma alegoria com a sociedade da época, construindo uma sociedade de figuras geométricas planas e equiparando características humanas a algumas propriedades geométricas, constituindo um bom exemplo dessa arquitectura global:

Chamo Flatland (Terra Plana ou País Plano) ao mundo em que vivo, não porque seja esse o seu nome, mas para vos tornar mais clara a sua natureza, felizes leitores, que tendes o privilégio de habitar o Espaço.¹⁷⁶

¹⁷² Paul Erdős (1913-1996), matemático húngaro. Erdős trabalhou em colaboração com centenas de matemáticos, dedicando-se a problemas de cálculo combinatório, teoria de grafos, teoria de números, análise matemática clássica, teoria de limites, teoria de conjuntos e teoria de probabilidades.

¹⁷³ <www.imdb.com>

¹⁷⁴ *O Castelo dos Destinos Cruzados*, Italo Calvino, trad. José Colaço Barreiros, Editorial Teorema, 2003, p.7.

¹⁷⁵ *Flatland – O País Plano*, Edwin A. Abbott, trad. M. Luísa Mascarenhas e L. Trabucho de Campos, Editora Gradiva, 1993.

¹⁷⁶ *Ibid.*, p. 21.

O outro tipo de arquitectura começa com uma configuração inicial e é sucessivamente transformada de acordo com uma determinada operação matemática como, por exemplo, um conjunto exaustivo de permutações ou combinações. O texto pode não conter todos os possíveis resultados da operação, permutação ou combinação, tornando-se um processo aberto. A obra *Cent Mille Millions de Poèmes*¹⁷⁷, de Raymond Queneau, constituída por um soneto que possui, para cada verso, nove versos alternativos, tornando possível cem mil milhares de milhão de poemas... Não constitui um processo aberto, mas vai muito para além dos poemas que um ser humano está disponível a ler numa única obra.

4 – O uso de noções matemáticas (Infinito, regressão infinita, ramificando o tempo) como o elemento temático chave ou situação básica inicial de uma narrativa.

Encontra-se, na base do conto “Biblioteca de Babel” de Jorge Luís Borges¹⁷⁸, ou de “O Prado Infinito”, de Italo Calvino¹⁷⁹, uma profunda reflexão sobre o infinito matemático.

No primeiro estão presentes algumas noções de limites de sucessões:

...a biblioteca é ilimitada e periódica. Se um eterno viajante a atravessasse em qualquer direcção, verificaria ao cabo de séculos que os mesmos volumes se repetem na mesma desordem (que, repetida, seria uma ordem: a Ordem).¹⁸⁰

No segundo, podemos apreciar, por exemplo, a descrição da noção de conjuntos *densos*¹⁸¹, associando as ervas daninhas ao conjunto dos números irracionais e as ervas “boas” ao conjunto dos racionais (ou vice-versa), por exemplo:

O senhor Palomar está a arrancar as ervas daninhas, acorrido sobre o prado. [...]...as ervas daninhas estão de tal maneira emaranhadas nas boas que não se consegue enfiar as mãos no meio para puxar. [...] entre plantinha e plantinha há sempre um rebento de folhinha...¹⁸²

5 – Conceitos Fundamentais ou questões conceptuais com a mesma, similar ou análoga natureza, ocorrendo tanto na matemática, como na narrativa, e ocupando posições centrais em ambas.

Relativamente a este último ponto, será feita uma análise mais profunda, identificando algumas questões e conceitos, considerados pertinentes. Procurar-se-á descrever as suas especificidades, em cada discurso, de forma comparativa, sempre que possível.

¹⁷⁷ *Cent Mille Millions de Poèmes*, Raymond Queneau, Gallimard, 1961.

¹⁷⁸ *Ficções*, Jorge Luís Borges, trad. José Colaço Barreiros, Teorema, 1998, p. 76.

¹⁷⁹ *Palomar*, Italo Calvino, trad. João Reis, Teorema, 1985, p.37.

¹⁸⁰ *Ficções*, Jorge Luís Borges, trad. José Colaço Barreiros, Teorema, 1998, pp. 76-77.

¹⁸¹ São *densos* os conjuntos dos números racionais e dos números irracionais – por exemplo –, pois entre quaisquer dois números racionais existe pelo menos um irracional e entre quaisquer dois números irracionais existe pelo menos um racional.

¹⁸² *Palomar*, Italo Calvino, trad. João Reis, Teorema, 1985, pp. 38-39.

5.1 Liberdade criativa e constrangimentos inerentes.

As construções matemáticas e as narrativas literárias, como sistemas simbólicos, pertencem a um meio especulativo ou da criação livre, sem os condicionalismos do empírico ou do material. Pode-se afirmar sobre ambos que envolvem a elaboração de mundos imaginários, arquitectados numa existência intersubjectiva através de símbolos (palavras, notação matemática). A verdade, em correspondência com o mundo real, não é excluída, mas não constitui um critério fundamental. A esse propósito, diversos matemáticos afirmaram essa característica intrínseca, desde Poincaré, para quem “a criatividade matemática constitui a actividade em que a mente humana parece recolher o mínimo do mundo exterior, agindo ou parecendo agir apenas em si e sobre si”¹⁸³, Cantor¹⁸⁴, que observou que “a essência da Matemática é a liberdade para construir, para fazer pressuposições”¹⁸⁵, ou Bolyai¹⁸⁶ que, de forma mais extrema, alegava que, com a matemática, “criei um universo do nada”¹⁸⁷.

Desta forma, os dois discursos são um jogo, em que existe uma postura desinteressada (verdadeiro para a matemática pura), mas com regras, ordenada, onde as restrições voluntárias são formuladas e aceites, sustentando os mundos resultantes da fabricação mental (mas que, ao contrário das teorias científicas, não carecem de confirmação, uma vez que não são criadas com um intuito preditivo ou com uma necessidade de correspondência com o mundo concreto). Por vezes os mundos específicos da imaginação literária surgem como reacção ou alternativa às visões literárias maioritariamente aceites do seu tempo (Por exemplo, o *romantismo* em reacção ao *iluminismo*¹⁸⁸). Também na Matemática isto ocorre. Novos sistemas, como a geometria não euclidiana, foram construídos como desafio à ortodoxia vigente. No caso da geometria não euclidiana, o seu desafio

¹⁸³ *Science et Méthode*, Henri Poincaré, livre premier – “Le Savant et la Science“, cap. III – “L’Invention Mathématique“, Ernest Flammarion Editeur, Paris, 1920, p. 43

<fr.wikisource.org/wiki/Science_et_méthode/Livre_premier,_§_III>, Setembro de 2013.

¹⁸⁴ Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), matemático alemão, reconhecido como o criador da teoria de conjuntos. Cantor estabeleceu a importância da correspondência unívoca entre elementos de dois conjuntos. A aplicação dessa correspondência a conjuntos infinitos demonstrou a existência de diferentes infinitos.

¹⁸⁵ “Georg Cantor and Pope Leo XIII: Mathematics, Theology, and the Infinite”, Joseph W. Dauben, *Journal of the History of Ideas* 38 (1), 1977, pp. 91–93.

¹⁸⁶ János Bolyai (1802-1860), matemático húngaro, um dos fundadores da geometria não-euclidiana – uma geometria que difere da geometria euclidiana na sua definição de rectas paralelas (5º postulado de Euclides). A descoberta de uma alternativa geométrica consistente, que poderia corresponder à estrutura do universo, ajudou a libertar os matemáticos para o estudo de conceitos abstractos, independentemente da sua possível correspondência com o mundo físico.

¹⁸⁷ Carta de Temesvár (Timisoara) de János Bolyai para Farkas Bolyai, 3 de Novembro de 1823, Setembro 2013, <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Extras/Bolyai_letter.html>.

¹⁸⁸ *The Roots of Romanticism*, Isaiah Berlin, Princeton University Press, 1999, p. 9.

abarcou a visão filosófica dominante (Kantiana), pondo em causa, logo à partida, a forma como a mente opera e concebe a realidade¹⁸⁹.

A origem de novas formas de produzir e transmitir o conhecimento emana frequentemente de crises disciplinares. A definição de crise na matemática constitui uma forma igualmente correcta de definir as crises na criação literária.

(*Uma crise ocorre*) quando alguma área abrangente de conhecimento, vocabulário teórico ou silogismo são entendidos como inadequados, de uma forma essencial, ou perderam o significado atribuído anteriormente.¹⁹⁰

Pode muito bem ocorrer que o modelo das mudanças de paradigma de Kuhn, para descrever a dinâmica das crises e das profundas reorientações nas ciências naturais possa ser aplicado à matemática e à escrita narrativa, mesmo que a incapacidade de produzir dados empíricos, de se associar a fenómenos ou a descobertas experimentais não possa ser um motivo ou um catalisador de mudança em qualquer uma destas áreas do conhecimento. Podemos acrescentar que a formação de um novo sistema pode ser igualmente motivado por uma restrição assumida do sistema dominante (geometria euclidiana, narrativa realista) ou, inversamente, pela percepção de uma necessidade de coerência (a busca pela formalização, encetada por Hilbert, ou a censura realista aos excessos da imaginação romântica). Mas o desejo criativo/inovador puro de produzir um jogo diferente, de tentar realizar as coisas de uma forma pressupostamente mais eficaz, pode também ter o seu papel nesta problemática. Para alegações mais específicas, serão necessários estudos de caso.

Finalmente, como sistemas discursivos, tanto a narrativa matemática como a narrativa literária são, em princípio, auto-criativos, autocríticos, auto-referentes, auto-regulados. Mas como a narrativa literária constitui, pela sua natureza, algo completamente interpretado, intencional e contextualizado¹⁹¹, são exercidas pressões externas, com o intuito de ser ou mudar num determinado sentido.

A liberdade criativa, nos dois domínios, é contrabalançada por restrições ou regras de formulação auto-impostas. Nas palavras de Goethe, “É na contenção que o mestre se mostra e só as regras nos possibilitam a liberdade”¹⁹². O matemático diria “seja o domínio D, ao qual pertencem os

¹⁸⁹ Apesar de, na interpretação de muitos autores, Kant ter uma visão eminentemente euclidiana, onde a importância das figuras geométricas impede, em certa medida, a aceitação das geometrias não-euclidianas, Michael Friedman contesta essa interpretação (“Kant on geometry and spacial intuition”, Michael Friedman, *Synthese*, 2012, vol.186, pp. 231-255).

¹⁹⁰ “Matemática e Narrativa: Uma Perspectiva Narratológica”, Uri Margolin, in *Circles Disturbed – the Interplay of Mathematics and Narrative*, orgs. Barry Mazur e Apostolos Doxiadis, Princeton University Press, 2012, p. 490.

¹⁹¹ *Once upon a Number: The Hidden Mathematical Logic of Stories*, John Allen Paulos, Basic Books, 1998, pp. 22-27.

¹⁹² < <http://www.sonett-archiv.com/gh/Goethe/sonett.HTM> >, soneto de 1800, visto em 21 de Agosto de 2014.

objectos a, b e c, e no qual são válidos os seguintes axiomas e operações, ou regras de inferência ou de derivação.” De forma similar, também na narrativa literária existem diferentes tipos de mundos (géneros literários), cada um definido pelo seu próprio leque de entidades específicas, regras que determinam o que constitui possibilidade ou impossibilidade na sua construção, que comportamentos das personagens são admissíveis, necessários ou incoerentes, etc.. (Mas não é só isto. Mesmo um sistema matemático ou lógico é inventado livremente, e mesmo que se explicita todos os pressupostos que lhe são intrínsecos, podem emergir inalteráveis, inesperadas e fundamentais consequências, limitações ou constrangimentos, aparentemente inerentes ao sistema). Aparentemente, há outra citação de Goethe que é aplicável neste contexto: “só o primeiro passo se constitui como completamente livre”¹⁹³. São famosos os exemplos dos paradoxos de Cantor da teoria de conjuntos ou da descoberta das limitações inerentes a toda a computabilidade por parte de Turing¹⁹⁴, nos primórdios da ciência computacional. Hermann Weyl afirmou que a matemática encontra-se na encruzilhada da liberdade e do constrangimento. De maneira similar, embora com uma veia mais metafórica, os autores afirmam muitas vezes que começam um poema ou uma história de forma livre, mas que em determinada altura as personagens, a métrica ou o enredo assumem o controlo, adquirindo uma vida própria, ditando ao autor como proceder daí em diante.)

Tanto a narrativa, como a matemática e a lógica – observadas de um ângulo ligeiramente diferente –, podem criar uma gama de sistemas alternativos do mesmo tipo: um conjunto de sistemas lógicos, diferindo uns dos outros em um ou mais dos seus pressupostos básicos ou das suas regras de derivação, ou um conjunto de géneros de narrativa, governados por diferentes postulados ontológicos, epistemológicos, deontológicos, e axiológicos, leis e regras¹⁹⁵. As considerações estéticas têm um papel fundamental na avaliação da produção matemática ou literária. As demonstrações e os enredos narrativos podem ser apreciados apenas por si sós, e a elegância, simplicidade, clareza, brevidade, poder, coerência, invenção, originalidade e introspecção são termos que norteiam a estética que se pretende nas duas áreas. John Von Neumann¹⁹⁶ foi ao extremo de afirmar que “os critérios que

¹⁹³

To devils and ghosts the same laws appertain:

The same way they enter in, they must go out.

In the first we're free, in the second slaves to the act.

<<http://www.poetryintranslation.com/PITBR/German/FaustIScenesItoIII.htm>>, *Fausto*, Acto 1, Cena 3, Johann Wolfgang Von Goethe, linha 1410, em 21 de agosto de 2014.

¹⁹⁴ Alan Mathison Turing, (1912-1954), matemático, lógico, criptanalista e cientista computacional. Criador da formalização dos conceitos de “algoritmo” e de “computação”, com a máquina de Turing, que pode ser considerada um modelo geral de um computador. Turing é por muitos considerado o pai da computação e da inteligência artificial.

¹⁹⁵ “Narrative Worlds”, *Heterocosmica: Fiction and Possible Worlds*, Lubomir Dolezel, John Hopkins University Press, 1998, pp. 31-132.

¹⁹⁶ John von Neumann (1903-1957), matemático, puro e aplicado, e polímato americano, de origem húngara. Teve contributos relevantes na matemática (fundamentos da matemática, análise funcional, teoria ergódica, geometria, topologia e análise numérica), na física (mecânica quântica, hidrodinâmica e dinâmica dos fluidos),

definem o sucesso matemático são quase inteiramente estéticos.” Mas no caso da matemática e da lógica, os teoremas e as proposições necessitam de ser formalmente validados (correctamente inferidos ou derivados, dedutíveis e desejavelmente demonstráveis), antes da aplicação do critério estético. E, no caso da literatura contemporânea, novos e antagónicos critérios de valor foram promovidos, como a fragmentação, a ambiguidade, a opacidade, a estrutura flexível e a negação de um significado único – os quais são totalmente inaceitáveis em qualquer tipo de sistema lógico ou matemático. São óbvias algumas das principais diferenças nos dois discursos. As afirmações e objectos matemáticos podem ser dotados de uma dimensão semântica, através da interpretação conferida pela sua presença num modelo ou na realidade, sendo algo opcional. Por outro lado, todas as narrativas literárias são interpretadas semanticamente, lidando com um aspecto particular: uma perspectiva individual, uma situação ou contexto específicos, um singular detalhe psicológico ou social.

Nos estudos literários, tal como na aritmética, podem-se aplicar fórmulas: padrões afirmativos com variáveis, substituíveis por constantes individuais, apesar de mesmo essas variáveis terem papéis parcialmente interpretados: activo e passivo, emissor e receptor. Poder-se-á alegar a existência de uma analogia entre as proposições narrativas na gramática das histórias e as proposições matemáticas, mas também aqui as variáveis designam, desde o início, um evento, acção ou estado, muitas vezes de carácter específico, enquanto as variáveis matemáticas podem representar qualquer coisa até serem interpretadas ou aplicadas. Para além disso, as relações básicas entre as proposições narrativas são causais ou temporais. Estes dois pilares da narrativa poderão ser irrelevantes para os sistemas matemáticos, onde as relações são de natureza lógica (consequência, implicação, pressuposição, inclusão) e simultâneas, eternas, indiferentes ao tempo, espaço e causa.

Todas as histórias individuais, sendo estruturas interpretadas, são necessariamente sobre qualquer coisa no sentido literal (evento, tema, personagem) e, frequentemente, também metafórico, simbólico, alegórico, etc. Os termos singulares que ocorrem numa história normalmente referem-se pelo menos ao mundo imaginário projectado pelo texto. Os sistemas lógicos e matemáticos, pelo menos na matemática pura, não necessitam de ser sobre algo em particular, e as expressões matemáticas não necessitam de possuir um inerente significado ou referência, podendo assim referir-se aos mais diversos objectos do universo, incluindo outros objectos matemáticos, dependendo da interpretação dada no contexto específico escolhido.

É bem conhecido que usualmente as histórias são contadas cronologicamente alteradas, pelo menos parcialmente (não existe um isomorfismo entre o tempo real e o tempo narrativo). Isto impõe requisitos cognitivos adicionais ao leitor, mas como esta prática remonta a Homero, os leitores têm

economia (teoria dos jogos), na ciência computacional (arquitetura de von Neumann, programação linear, máquinas auto-replicas, computação estocástica) e na estatística.

uma grande predisposição para reconstruir a ordem temporal e causal “naturais”, implícitas na narrativa. Constitui uma convenção básica do conto que o mesmo rol de eventos possa ser representado em diferentes ordens sequenciais, sendo essa ordem de apresentação independente dos acontecimentos. Essa organização cronológica estabelecida não afecta a natureza do contado. Assim, podem existir muitos contos para uma correspondência real. Em quaisquer demonstrações ou linhas de argumentação matemáticas, as relações básicas entre postulados sucessivos é inferencial, se...então (ou portanto), e não existe um domínio independente por detrás ou implícito na sucessão de fórmulas ou proposições, que possa ser apresentado de várias maneiras. Qualquer sistema de proposições é definido pela ordem lógica da sua apresentação, sendo-lhe inerente. Se nos fosse apresentada uma demonstração com uma ordem alterada, considerá-la-íamos defeituosa e quereríamos rearranjá-la de forma a reconstruir a necessária sequência lógica de passos, conducente a uma demonstração consequente e válida. No mínimo, nenhuma apresentação de uma demonstração com a ordem alterada iria valer qualquer louvor ao seu autor, enquanto na narrativa é considerado uma marca de criatividade. Para além disso, porque desejaria e qual seria a motivação – em termos de resultados pretendidos –, de alguém para alterar a sequência lógica de uma demonstração? Na narração literária, por outro lado, a alteração cronológica é uma fonte de numerosos efeitos cognitivos e emocionais (suspense, curiosidade, surpresa, envolvimento, preocupação, tensão), considerados, não só valiosos, mas desejáveis.

5.2 Que géneros de objectos são entidades matemáticas e literárias (números, pontos, conjuntos, funções, personagens), e quais são as suas formas de existência?

Matemáticos, escritores criativos e teóricos da literatura por vezes colocam-se estas questões. Primeiramente note-se que em ambos os discursos, matemático e narrativo, abundam entidades que não existem ou não podem existir no mundo real: números imaginários como a raiz quadrada de -1, pontos sem dimensão, figuras geométricas perfeitas, unicórnios, seres biónicos. Para as entidades literárias, isto é, as personagens retratadas nos mundos das histórias ficcionadas, existem quatro perspectivas disponíveis na literatura actual e na teoria estética:

- 1- As personagens são objectos Meinongianos¹⁹⁷: indivíduos não reais, que se presume existirem num qualquer domínio ficcional hipotético, fruto da imaginação do leitor. Uma

¹⁹⁷ Alexius Meinong (1853-1920), filósofo austríaco cuja notoriedade se deve, em grande parte, à formulação de uma teoria de objectos não-existent, duramente atacada por Bertrand Russell (não obstante o seu profundo respeito pela obra de Meinong). Um dos resultados dessa escola foi precisamente a Teoria dos Objectos (*Gegenstandstheorie*) de Meinong. A teoria baseia-se na suposta observação empírica de que é possível pensar em algo, como uma montanha de ouro, mesmo que esse objecto não exista. Como podemos referir essas coisas, elas devem ter algum tipo de ser. Meinong distingue assim o "ser" de uma coisa, em virtude da qual pode ser um objecto de pensamento, da "existência" de uma coisa, que é o *status* ontológico substantivo atribuído, por exemplo, aos cavalos, mas negado aos unicórnios. Este conceito também se pode aplicar no teatro, na medida em que o Eu (a personagem) que o actor encarna não constitui o seu próprio Eu.

versão extrema deste ponto de vista podemos atribuir a Pirandello¹⁹⁸ que, no seu conto “Uma Personagem Aflita”, assim como na sua peça *Seis Personagens à Procura de um Autor*, afirma que as personagens literárias são possibilidades eternamente existentes, como as ideias platónicas, algumas delas contextualizadas pelos autores, mas que existem independentemente desse facto¹⁹⁹. O realismo matemático afirma igualmente que alguns objectos matemáticos, como os números naturais, são abstractos, não causais, racionalmente independentes, indestrutíveis, não pertencendo ao binómio espaço-tempo. E o mesmo pode ser dito dos teoremas matemáticos. Deste ponto de vista, as ideias matemáticas têm uma existência própria e são descobertas pelos humanos. Podem surpreender-nos, no sentido em que podemos levar algum tempo a descobrir inesperadas “verdades”, regularidades, ou consequências, das quais não nos apercebemos à primeira vista. De forma similar, poderão existir objectos matemáticos ou espécies de objectos eternos, ainda não desvendados pela mente humana.

- 2- Outra perspectiva sobre as personagens literárias consiste na ideia de que são geradas nas mentes dos autores e colocadas no texto. De seguida, passam a existir como representações baseadas em *texto* na mente do leitor, por eles (re)construídas durante a leitura. A posição matemática análoga constitui o intuicionismo, que defende que não existem “verdades” matemáticas não-experienciáveis e que todos os objectos matemáticos derivam dos nossos actos conscientes. Intimamente relacionado encontra-se o construtivismo, que sustenta que a matemática genuína constitui-se apenas do que pode ser obtido por uma construção finita. Cada objecto matemático é obtido a partir de um acto gerador particular. A existência está ligada à construção, e “o que se constrói constitui o que existe”²⁰⁰.

¹⁹⁸ Luigi Pirandello (1867-1936), dramaturgo, romancista, poeta e contista italiano, Prémio Nobel da Literatura em 1934. A obra de Pirandello inclui romances, centenas de contos e cerca de quarenta peças teatrais. As suas farsas trágicas são muitas vezes consideradas como precursoras do Teatro do Absurdo (forma do teatro moderno que utiliza, para a criação do enredo, das personagens e do diálogo, elementos chocantes do ilógico, com o objectivo de reproduzir directamente o desatino e a falta de soluções em que estão imersos o homem e sociedade).

¹⁹⁹ Em *Seis Personagens à Procura de um Autor*, uma companhia de teatro prepara-se para ensaiar a peça *As regras do jogo*, de Luigi Pirandello. Quando o ensaio está quase a começar, este é subitamente interrompido pela chegada de seis estranhas pessoas. O director da peça, furioso com a interrupção, exige uma explicação. O Pai explica que são personagens inacabadas, à procura de um autor que termine a sua história. Em “Uma Personagem Aflita”, o doutor Fileno vai uma manhã de domingo a casa de um escritor, insinuando-se a uma miríade de personagens, na tentativa de encontrar realizada a sua implementação cénica. Ele expõe então a sua “filosofia de longe”, segundo a qual “como através de um telescópio invertido”, vê as coisas vizinhas como pequenas e longínquas: ele projecta-se no futuro, por considerar o presente como se fosse já passado. A recusa, da parte do escritor, de realizar artisticamente Fileno é decidido, revelando-lhe este último que não soubera tirar verdadeiro partido da sua teoria, aplicando-a a si próprio.

²⁰⁰ Os construtivistas abordaram o problema dos fundamentos da Matemática de uma forma radicalmente diferente da dos logicistas. Enquanto os logicistas consideravam que nada havia de errado com a Matemática clássica, sendo os paradoxos originados por erros dos matemáticos, mas não causados por imperfeições da ciência matemática, os construtivistas viam estas contradições como indicações claras de que a Matemática clássica estava longe de ser perfeita.

- 3- Uma terceira visão propõe que as personagens literárias são criadas de forma contingente, objectos abstractos ou géneros de pessoas, produtos ou artefactos incompletamente determinados, construídos pelo autor em determinado ponto do tempo e do espaço, existindo em espaços culturais interpessoais. A correspondente perspectiva matemática²⁰¹ teria objectos e “verdades” matemáticas a habitar no terceiro reino de Eccles²⁰² e Popper²⁰³, nem físico, nem psicológico, mas de entendimento cultural humano partilhado, como artefactos culturais. A matemática, sob este ponto de vista, é falível e corrigível, sendo humanamente criada e não descoberta (o mesmo seria provavelmente aceite pelos proponentes do segundo ponto de vista).
- 4- Finalmente, temos a perspectiva reducionista, para a qual não existem entidades chamadas “personagens literárias”. Existem apenas frases onde ocorrem nomes próprios, que não definem nenhum indivíduo. Estas frases estão anaforicamente relacionadas entre si, na medida em que partilham a mesma entidade como tópico gramatical, não ocorrendo nada mais para além disso. Toda a narrativa ficcional constitui um jogo de linguagem, do princípio ao fim. Saltam à vista semelhanças com o formalismo matemático, que defende a inexistência de objectos matemáticos. A matemática consiste em axiomas, definições e teoremas – fórmulas. Existem regras que permitem obter uma fórmula de outra, mas essas fórmulas não são sobre nada. Essas fórmulas podem adquirir um domínio semântico, significado e referência (versus coerência formal e validade), a partir do momento que lhe é conferida uma interpretação, mas essa interpretação já não as constitui.

Os anteriores paralelismos entre a teoria literária e a metamatemática sobre a natureza dos seus objectos respectivos começa por ser uma surpresa mas, pensando bem, constitui uma consequência da

A forma de construtivismo mais conhecida é o intuicionismo iniciado por Brouwer em 1908. Para Brouwer, não é a experiência nem a lógica quem determinam a coerência e aceitabilidade das ideias, mas sim a intuição. Profundamente influenciado pela teoria de Kant relativa à intuição de tempo, Brouwer sustenta que os números naturais nos são dados por uma intuição fundamental, ponto de partida de toda a Matemática.

"In Kant we find an old form of intuitionism, now almost completely abandoned, in which time and space are taken to be forms of conception inherent in human reason. For Kant the axioms of arithmetic and geometry were synthetic a priori judgments, i.e., judgments independent of experience are not capable of analytical demonstration; and this explained their apodictic exactness in the world of experience as well as in abstract. For Kant, therefore, the possibility of disproving arithmetical and geometrical laws experimentally was not only excluded by a firm belief, but it was entirely unthinkable." in *Intuitionism and Formalism*, Brouwer, 1964, p. 67.

²⁰¹ *The Mathematical Experience*, Philip Davis e Reuben Hersh, Houghton Mifflin, 1981.

²⁰² John Carew Eccles (1903-1997), PN1963, neurofisiologista australiano. O seu interesse pela filosofia relacionava-se com o problema mente-corpo. Adepto da filosofia de Karl Popper, do qual se tornou amigo, e com o qual trabalhou em conjunto na teoria dos Três Mundos. O Mundo 1 – os objectos e estados físicos. O Mundo 2 – os estados de consciência. O Mundo 3 – o conhecimento humano espalhado pelo mundo, literatura, música, arte, ciência, etc..

²⁰³ Sir Karl Raimund Popper (1902-1994), filósofo austro-britânico. Considerado um dos maiores filósofos da ciência do século XX. O conhecimento, para Popper, era objectivo, tanto no sentido de ser objectivamente verdadeiro (ou verosímil), como no sentido de possuir uma existência independente do sujeito que conhece.

observação inicial de que os dois tipos de objectos não são empíricos, estando necessitados essencialmente da actividade da mente humana e dos seus meios expressivos (palavras, símbolos), para fazerem parte do mundo em que nós existimos.

5.3 Os critérios de veracidade de postulados em sistemas matemáticos e em narrativas ficcionais.

Como foi anteriormente indicado, a verdade de uma proposição como correspondência com alguma contextualização externa não constitui um critério admissível, quer na matemática, quer na narrativa literária. A “verdade” de um teorema em matemática depende da sua demonstrabilidade com recurso a um método de inferência aceite – a sua dedutibilidade de outras proposições aceites como “verdadeiras” (axiomas ou outros teoremas), ser uma sequência lógica dessas proposições, existência de algoritmo ou de um argumento geral válido que o confirme, a possibilidade de ser provada para qualquer valor por indução, a possibilidade de ser demonstrada pelo seu contrário, por redução ao absurdo, etc.. Mas um teorema matemático só pode ser “verdadeiro” relativamente ao sistema no qual ocorre e aos axiomas e regras de construção desse sistema. Algumas afirmações sobre o infinito, por exemplo, resultam “verdadeiras”, na clássica teoria de conjuntos, e “falsas” na matemática intuicionista. O próprio conjunto de axiomas de sistemas relacionados pode ser algo diferente como, por exemplo, nas geometrias euclidianas e não-euclidianas. Mais do que isso, alguns tipos de lógica aceitam um terceiro valor “indeterminado”, adicional aos clássicos “verdadeiro” e “falso”, e existem operações de cálculo com diferentes graus de “verdade” ou verosimilhança. Para o sistema matemático no seu conjunto, a consistência (não existir contradição derivada da conjunção de quaisquer proposições do sistema) e a completude (a “verdade” de qualquer afirmação que possa ser formulada tem de ser determinada a partir do próprio sistema) constituem o ideal tradicional. Com Gödel sabemos, no entanto, que para cada sistema matemático, a partir de um certo grau de complexidade (fecundidade), existem afirmações que podem ser formuladas nesse sistema, mas cuja veracidade será para sempre indeterminada ou indecível. Estas proposições não são nem demonstráveis, nem não demonstráveis no sistema, sendo o sistema, no seu todo, consequentemente não completo.

As narrativas literárias não possuem axiomas, regras de derivação, ou processos de decisão. Ao invés, são baseados numa semântica afirmativa²⁰⁴. Como leitores, gostaríamos de saber o que constitui a verdade no mundo da história X, no que concerne às afirmações sobre eventos, acções, propriedades dos agentes narrativos, etc.. O conhecimento do mundo de uma história significa conhecer quem fez o quê, quando, onde, em que circunstâncias, porquê e para quê. Aqui, também, a “verdade” é moldada pela história e pelo género. O que pode ser “verdade” em *D. Quixote*, no mundo de uma história de Cervantes, pode não ser verdade noutra história do mesmo autor. Uma afirmação genérica sobre a natureza física ou humana pode ser “verdadeira” (ou pelo menos provável ou

²⁰⁴ Considera-se, por convenção, que o narrador conhece toda a “verdade” relativamente à história.

possível) no mundo de uma determinada história (fantástica), mas não o ser noutra (numa realista, por exemplo). Quem decide? A resposta mais simples é que é a convenção literária. A narrativa literária ficcional é estabelecida pela convenção constitutiva da semântica afirmativa: qualquer afirmação relativa ao mundo da história por um narrador anónimo geral, com acesso mental ilimitado às personagens e falando na terceira pessoa do pretérito perfeito do indicativo (“ele fez”, “ela pensou”) torna-se “verdadeira” por decreto. Estas afirmações não se reportam apenas ao mundo de uma história. De facto, elas constituem-no, no próprio acto de proclamar algo acerca desse mundo. Quanto menos impessoal se torna o narrador, menos fiáveis são as suas afirmações e maior é a opacidade, dúvida e indeterminação sobre o que constitui a “verdade” da história²⁰⁵.

Voltando à voz da autoridade do narrador anónimo, o seu discurso fornece o instrumento com o qual se determina a “verdade”, a “verdade” parcial, ou a “falsidade” de qualquer frase proferida pelas personagens, quaisquer das suas crenças, etc.. Cada personagem tem a sua própria epistemologia do mundo narrado, que terá de ser escrutinado pelo conhecimento completo fornecido pela “voz da verdade” do narrador.

O grau de incompletude de um sistema matemático e a necessidade de incorporar o valor “indeterminado” de “verdade” numa fórmula interna do sistema representa a fronteira superior do que pode ser alcançado num tal sistema. Mas nunca nenhum sistema matemático foi criado para ser deliberadamente insuperável e de limites internos absolutos. Neste aspecto, o mundo das histórias é muito diferente. Em qualquer mundo ficcionado, só uma quantidade limitada de informação sobre as personagens é fornecida ou dedutível do texto, de tal forma que a maioria das afirmações que podemos formular sobre elas, que sejam consistentes com tudo o que é considerado “verdadeiro” no seu mundo, manter-se-ão indeterminadas em relação à sua veracidade. De facto, todos os mundos ficcionados são radicalmente incompletos, e essencialmente peçados de lapsos de “verdade”. Para além disso, mesmo afirmações feitas dentro do mundo ficcionado por uma ou mais personagens podem manter-se “indeterminadas”, se nenhuma informação com autoridade for fornecida no texto, que permita avaliar o seu grau de “verdade”. Alguns autores, aplicando um narrador inverosímil ou que observa as situações pelos olhos das personagens, diminuem deliberadamente o grau de decisão possível, relativamente a quaisquer afirmações desse mundo, para que a ambiguidade, a hesitação, e a falta de concórdia reinem supremas. Em relação à consistência, a voz anónima tradicional da “verdade” é consistente nas suas afirmações, sendo a inconsistência limitada ao discurso de personagens específicas, em relação a afirmações feitas, sobre o mesmo tópico, por outras personagens, ou entre uma ou mais personagens e a voz da “verdade”. A narração pós-modernista²⁰⁶

²⁰⁵ *Once upon a Number: The Hidden Mathematical Logic of Stories*, John Allen Paulos, Basic Books, 1998, pp. 180-182.

²⁰⁶ “A função narrativa perde os seus funtores, o grande herói, os grandes perigos, os grandes périplos e o grande objectivo. Ela dispersa-se em nuvens de elementos de linguagem narrativa, mas também denotativos, prescritivos, descritivos, etc.” in *A Condição Pós-Moderna*, Jean-François Lyotard, Gradiva, 2003, p.12.

constitui o oposto desta prática. Constrói deliberadamente mundos ficcionados, onde as inconsistências ou mesmo contradições abundam, tanto local como globalmente, onde indeterminação ou incompatibilidade reinam em relação a predicações ou mesmo afirmações existentes, predicação que vai diminuindo, à medida que a história se vai desenrolando. De facto, as três regras básicas da lógica (identidade, contradição, terceiro excluído²⁰⁷) são violadas de forma deliberada e flagrante, de forma sucessiva. Quando esta prática ocorre no discurso da maior autoridade, isto é, do narrador anónimo, torna-se impossível construir, a partir do texto, um modelo geral ou um fio condutor da história, ficando apenas com versões alternativas, mutuamente exclusivas, sobre quem e o quê do mundo ficcionado, ou com ilhas de ordem isoladas num oceano de caos²⁰⁸. Finalmente, na visão contemporânea, a inconsistência não invalida a experiência estética ou cognitiva da leitura e, ao contrário da lógica clássica, nem sempre resulta uma conclusão de uma contradição, uma vez que esta se encontra localizada ou ancorada na forma de pensar de uma determinada personagem.

5.4 Sequência, Nível e Hierarquia.

O jogo com as regras e regularidades lógicas e narrativas, tão presente na narrativa contemporânea, estende-se para além da questão da “verdade”. Também leva em linha de conta as duas regras básicas de ordenação de elementos, a sequência linear e a hierárquica. Assim, não é raro que a narrativa contemporânea apresente o texto, com as suas partes e eventos, apenas parcialmente ordenado numa sequência. Para algumas das suas subsequências ou eventos individuais, várias localizações temporais alternativas são concebíveis, por vezes até equiprováveis. Em termos matemáticos, qualquer projecção do texto numa reconstrução de acontecimentos que lhe possam estar subjacentes, é parcialmente indeterminada.

Muito mais extensa é a destruição conseguida com a questão hierárquica. De acordo com o *Cambridge Dictionary of Philosophy*²⁰⁹, a “hierarquia”, em matemática, consiste na divisão dos objectos matemáticos em subcategorias, em concordância com uma ordenação que reflecte a complexidade desses objectos. Mais do que isso: para evitar os paradoxos da auto-referência, Bertrand Russell desenvolve a teoria dos tipos lógicos simples, posteriormente a teoria ramificada, acerca da hierarquia desses tipos, fossem classes, propriedades, ou proposições, e formulou regras de pertença e referência. Também postulou que, para evitar os paradoxos supracitados, uma dada entidade teria de pertencer a um único nível. Na narrativa, normalmente fala-se da hierarquia da linguagem e da metalinguagem, discurso ou metadiscurso, proposição ou metaproposição. Mas também existe uma

²⁰⁷ Na lógica clássica (bivalente), a identidade constitui a propriedade de unicidade da existência, isto é, $A \text{ é } A$. A propriedade da não-contradição diz-nos que uma entidade não pode ser o seu contrário, i. e., $A \text{ não é } \sim A$. Finalmente, ou algo existe, ou não existe, não há uma terceira possibilidade, logo se A constitui algo verdadeiro, $\sim A$ é falso, e vice-versa.

²⁰⁸ *Once upon a Number: The Hidden Mathematical Logic of Stories*, John Allen Paulos, Basic Books, 1998, p. 173.

²⁰⁹ *The Cambridge Dictionary of Philosophy*, Robert Audi, Cambridge University Press, 1995.

hierarquia ontológica, uma vez que a interpenetração entre níveis está na base de todos os modelos de narrativa. Normalmente distingue-se, de cima para baixo, os níveis de autor e de leitor, narrador e narrado, personagens; as diferentes personagens que vão surgindo nas histórias dizem umas às outras, ou vêm, ou reflectem, etc.. Assume-se ainda que a relação de referência (quem se pode referir a quem) em norma vai de cima para baixo, sem saltar níveis, sendo transitiva e anti-simétrica.

No entanto, na literatura pós-moderna, encontram-se frequentemente narradores fazendo declarações contraditórias, cancelando desta forma uma propriedade do mundo ficcional anteriormente aceite, ou oferecendo versões alternativas incompatíveis do mesmo acontecimento, sem providenciar a possibilidade de decidirmos qual delas, se alguma, constitui a “verdadeira”. Os narradores de Beckett²¹⁰ empreendem uma infinita regressão de níveis de discurso. Um deles, em *Company*, por exemplo, pergunta “Quem diz?” e imediatamente formula nova pergunta, “Quem diz “quem diz?””. O orador-protagonista de *No Meu Subterrâneo*²¹¹, de Dostoiévsky²¹², faz uma asserção, depois nega-a, negando, de seguida, a negação da asserção inicial, etc. (isto é, p,~p,~~p...). Outros textos escamoteiam a distinção entre uma expressão simbólica e o objecto que lhe corresponde. Stanislaw Lem²¹³ vai mais longe, oferecendo um meta-texto, numa colecção de ensaios intitulados *A Perfect Vacuum* – sem que existam os fundamentos que os justifiquem²¹⁴. Muitas narrativas contemporâneas são primeiramente auto-referentes, falando incessantemente sobre a sua própria geração, natureza e propriedades, providenciando-nos um discurso que é principalmente sobre o seu

²¹⁰ Samuel Barclay Beckett (1906-1989), escritor, dramaturgo, director teatral e poeta irlandês, que viveu em Paris na idade adulta, tendo escrito em inglês e francês. A sua obra caracteriza-se pelo humor negro e pela visão trágico-cômica da natureza humana. Prémio Nobel da Literatura em 1969.

²¹¹ “Sabem o que seria muito melhor? Que eu acreditasse no que escrevo. Juro-lhes, senhores, que não creio numa única palavra...Ou, para ser mais exacto, creio e ao mesmo tempo, sem saber porquê, tenho a impressão que minto.”in “No Meu Subterrâneo”, *O Jogador e Outras Obras*, Fiodor Dostoiévski, trad. Maria Franco, Estúdios Cor, 1965, p. 6.

²¹² Fiódor Mikhailovich Dostoiévski (1821-1881), ocasionalmente grafado como Dostoiévsky, escritor russo, considerado um dos maiores romancistas da literatura. É tido como o fundador do existencialismo, em particular pela obra *No Meu Subterrâneo*.

²¹³ Stanislaw Lem (1921-2006), escritor polaco de ficção científica, filosofia e sátira. As suas obras foram traduzidas em 41 línguas. Conhecido como autor da obra várias vezes cinematografada *Solaris*, de 1961. O seu trabalho explora temas filosóficos como a natureza da inteligência, especulação sobre a tecnologia, a impossibilidade da comunicação e compreensão mútua, o desespero sobre as limitações humanas e o lugar da humanidade no universo.

²¹⁴ “I would like to take this opportunity – use this privileged podium – to tell you about the circumstances that led to the rise of a new model of the universe and marked out, in the process, a cosmic position for humanity radically different from the historical...[...].my research has eclipsed [...] the work of Aristides Acheropoulos, to such an extent that a historian of science, Professor Bernard Weydenthal, therefore an authority whom one would have thought qualified, recently wrote in his book, *Die Welt als Spiel und Verschwörung*, that the magnum opus of Acheropoulos, *A New Cosmogony*, was no scientific hypothesis but a literary fantasy in whose reality the author himself did not believe. By the same token, Professor Harlan Stymington, in *The New Universe of the Game Theory*, expressed the opinion that, in the absence of Alfred Testa’s work, the idea of Acheropoulos would have remained only a loose philosophical concept, on the order of the Leibnizian world of pre-established harmony [...]” in *A Perfect Vacuum*, Stanislaw Lem, First Harvest/HBJ edition, 1983, pp. 197-198.

próprio processo de discurso, uma história sobre a sua própria criação. Nas palavras de Jean Ricardou²¹⁵, a tradicional *histoire d'une aventure* foi substituída pela *aventure d'une histoire*. Em vez de providenciar uma narrativa dos acontecimentos, o texto fornece uma narrativa auto referente da sua própria criação. O nível *reversivo*, o nível *transgressão* e o nível *aglutinar* são fenómenos relacionados. Ontologicamente, o nível *reversivo* é evidente no capítulo 2 do livro II de *D. Quixote*, de Cervantes²¹⁶, onde as personagens inventadas ou ficcionadas de Quixote e Sancho Pança lêem e discutem o livro I de *D. Quixote*, queixando-se da justiça que não lhes foi feita pelo autor. De forma similar, em *At Swim-Two-Birds*, de Flann O'Brien²¹⁷, as personagens de uma novela que está a ser escrita sobre eles congemina o assassinato do autor, outro evidente exemplo de reversão da lógica de referência. O nível de *transgressão* ocorre quando Kurt Vonnegut²¹⁸, o autor, se coloca no mundo ficcional da novela *Breakfast of Champions*, confronta a personagem principal, Kilgor Trout, numa loja, e avisa-o que deve melhorar a sua conduta, pois ele (o autor) inventou-o e pode fazer dele o que quiser. Este episódio viola claramente a *unicidade* dos níveis a que podem pertencer diferentes entidades, postulados por Bertrand Russell relativamente à hierarquia na matemática, mencionados anteriormente. O nível a que pertencem certos acontecimentos ou personagens pode ser indeterminado, como em "The Babysitter", conto de Robert Coover, na qual não é claro se a babysitter é atacada e assassinada por um intruso, ou se está a ver esse drama de horror na televisão, enquanto desempenha o papel de babysitter no seu próprio mundo. As fronteiras tornam-se permeáveis e as hierarquias reversíveis em "The Kugelmass Episode", de Woody Allen, no qual Emma Bovary pode sair da sua novela, situada numa França rural do século XIX, e ter um caso amoroso com um professor secundário de Nova Iorque contemporânea. Mas sempre que ele a desaponta, ela retorna ao seu próprio mundo.

Mais bizarro e paradoxal é o nível *aglutinar*, no qual A engendra B (ou pressupõe), mas B simultaneamente engendra A (ou pressupõe), como na famosa gravura das duas mãos desenhando-se

²¹⁵ Jean Ricardou (n. 1932), escritor e teórico do movimento literário do novo romance – corrente caracterizada pela utilização de um novo estilo em cada romance que se vai escrevendo. Entre 1962 e 1971 fez parte da comissão editorial do jornal francês *Tel Quel*.

²¹⁶ Miguel de Cervantes Saavedra (1547-1616), romancista, dramaturgo e poeta castelhano. A sua obra-prima, *Dom Quixote*, muitas vezes considerado o primeiro romance moderno, constitui um clássico da literatura ocidental e é regularmente considerado um dos melhores romances já escritos. O seu trabalho é considerado entre os mais importantes em toda a literatura. A sua influência sobre a língua castelhana tem sido tão grande que o castelhano é frequentemente chamado de *La lengua de Cervantes* (A língua de Cervantes).

²¹⁷ Brian O'Nolan (1911-1966), romancista, dramaturgo e satírico irlandês, considerado um dos maiores vultos da literatura irlandesa do século vinte e do pós-modernismo. Os seus romances em língua inglesa, como *At Swim-Two-Birds*, e *The Third Policeman*, foram escritos sob o pseudónimo de Flann O'Brien. As suas muitas colunas satíricas no *Irish Times* e o romance em língua irlandesa *An Béal Bocht* foram escritos sob o pseudónimo de Myles na gCopaleen.

²¹⁸ Kurt Vonnegut, Jr. (1922-2007), escritor Americano. As suas obras *Cat's Cradle* (1963), *Slaughterhouse-Five* (1969), e *Breakfast of Champions* (1973), juntam sátira, humor negro e ficção científica. Como cidadão foi um apoiante da *American Civil Liberties Union* e um intelectual pacifista. Era conhecido pelos seus ideais humanistas e foi presidente honorário da *American Humanist Association*.

uma à outra, de M.C. Escher²¹⁹. Em “Em busca de Averroes”, de Jorge Luís Borges, lê-se: “Senti, na última página, que o narrador constituía um símbolo do homem que eu era, tal como o descrevi e, como tal, a única forma de compor aquela narrativa seria eu ser aquele homem, sendo necessário, então, que tivesse sido eu a escrever aquela narrativa e assim sucessivamente até ao infinito”. Em “A Continuidade dos Parques”, de Cortázar²²⁰, encontramos um fenómeno similar: Um homem, sentado numa poltrona, lendo um livro sobre um homem que, sentado numa poltrona, é assassinado, é também ele assassinado, quando chega à passagem do livro onde a personagem do livro é assassinada. Este último exemplo também ilustra o que já foi observado em “The Babysitter”, nomeadamente a reflexão entre níveis contidos e que contêm reduplicação, reiteração, isomorfismo, ou narrativas contidas dentro de outras narrativas. Obviamente que isto pode ocorrer sucessivamente num número infinito de níveis interligados. Um exemplo clássico é “Era uma vez uma história que começava “Era uma vez uma história que começava,” etc.”. Em sistemas matemáticos também se pode conceber uma regressão para níveis cada vez mais fundamentais, de tal forma que os pressupostos de um sistema tornam-se os teoremas de um sistema mais poderoso e fundamental, e assim sucessivamente. Mais do que isso, constata-se que um sistema lógico ou matemático, capaz de auto-referência – isto é, nos quais a formulação das proposições que se referem à sua própria natureza, estado, ou valor de “verdade” –, está aberto à confusão de linguagens e metalinguagens, nas suas aplicações e nas suas constatações, e, subsequentemente, à ocorrência de paradoxos de auto-referência²²¹.

5.5 Simulação Computacional e Cenários Futuros

A simulação computacional envolve a computação de cenários futuros, onde vários parâmetros inter-relacionados têm um papel a desempenhar. Ao lidar com sistemas complexos, consideram-se variáveis a ter em conta, a sua heterogeneidade, as múltiplas formas de as correlacionar, o facto de elas possuírem uma hierarquia de inter-relação, a variedade de operacionalidade possível ou tipos de funcionamento, e o conjunto mais ou menos elaborado de leis que, presumivelmente, governam o fenómeno em causa²²². As alterações climáticas e a sua simulação computacional constituem um exemplo do presente. A simulação pode ser entendida, neste contexto, como a construção e aplicação de um modelo de uma situação, usado para antecipar as consequências de certos actos ou processos. Também se pode usar a simulação para prever consequências alternativas. Então, começando com o estado actual do fenómeno e, com a alteração da natureza

²¹⁹ Maurits Cornelis Escher (1898-1972), artista gráfico holandês. Conhecido pelas suas obras de cunhagem em madeira, litografias e gravações em metal, inspiradas em conceitos matemáticos. Entre elas estão construções impossíveis, a exploração do infinito e utilização de frisos e padrões.

²²⁰ Julio Cortázar, nascido Jules Florencio Cortázar (1914-1984), romancista, contista e ensaísta argentino. Conhecido por ser um dos escritores que, na década de 60 e 70 do século passado, internacionalizou a literatura da América Latina, introduzindo novas ideias, juntamente com Gabriel García Márquez, Carlos Fuentes e Mario Vargas Llosa.

²²¹ “Metaleptic Machines”, Marie-Laure Ryan, *Semiotica* 150: 439-69, 2004, pp. 445-46.

²²² *Complexity*, Nicholas Rescher, Transaction Publishers, 1998, p. 9.

específica ou da inter-relação de variáveis-chave de diferentes formas, ou com a redução ou acréscimo de variáveis, seria possível gerar um enorme leque de cenários futuros alternativos. Todas essas computações tentam responder a uma questão básica: Como serão as coisas no futuro ou o que acontecerá se... usando sempre o aqui e agora como ponto de partida.

Especular sobre o futuro é uma das actividades principais da mente humana, evidentemente característica da espécie humana.²²³ Esta preocupação humana básica é reflectida na narrativa literária em diversos níveis. As personagens projectam cenários, muitas díspares entre si, sobre o que está reservado, para eles e para outros, no futuro, às vezes debatendo os seus diferentes cenários futuros. Na literatura, ao contrário da simulação computacional, a preocupação é habitualmente com indivíduos ou pequenos grupos e não com grandes populações, mas também aqui há excepções. O Velho Testamento (por exemplo, o Deuteronómio) oferece ao povo de Israel vários cenários futuros, com muitos níveis, dependentes do grau de obediência ao Senhor. Dois ramos distintos são projectados, um de calamidade e outro de felicidade, dependendo, tal como nas simulações de alterações climáticas, da escolha colectiva e da acção humana como variáveis decisivas. Ficção científica, utopias, e distopias estão preocupadas com a dramatização e a exemplificação, através do destino de alguns indivíduos, do estado, social e biológico, da futura humanidade. A narrativa literária não consegue adoptar métodos estatísticos e modelar, em abstracto, o futuro ser humano como um conjunto de características, ou representar o comportamento futuro como uma tendência estatística quantitativa numa população²²⁴. Em vez disso, os géneros literários, acima citados, apresentam um futuro prototípico de indivíduos ou grupos, representativo das suas características ou actos. De forma similar, a narrativa literária não consegue retratar processos contínuos de variação de população (de espécies), de forma abstracta, a longo prazo, tal como a evolução por selecção natural. Ao invés, fornece, uma vez mais, uma série de quadros de descontinuidade temporal, cada um representando uma fase do processo, incluindo um pequeno número de indivíduos e de acções restritas no tempo, possibilitando a construção do processo colectivo a partir da sua sequência. Um exemplo é *Galápagos*, de Kurt Vonnegut, uma história sobre a evolução reversa dos humanos retornando ao mar, e como seria a humanidade um milhão de anos após essa ocorrência.

²²³ “Talvez as próximas verdades sejam uma emboscada para o homem, e talvez a afinidade entre o pensamento especulativo e a sobrevivência, em que assenta toda a nossa cultura, esteja prestes a quebrar-se. [...] Há duas reacções evidentes, possíveis em semelhante encruzilhada. Há a resignação estóica de Freud, a sua formulação desenganada em extremo da possibilidade de que a vida humana fosse uma anomalia cancerosa, um desvio entre duas imensas extensões de repouso orgânico. E há a alegria Nietzscheana frente ao inumano, a intuição irónica, concentrada, de que somos, de que sempre fomos hóspedes de passagem num mundo indiferente, muitas vezes assassino, mas sempre fascinante...[...]. talvez a nossa pós-cultura se caracterize por preferir não durar a despedir-se dos riscos do pensamento.” in *O Castelo do Barba Azul*, George Steiner, Relógio D’Água, 1992, p. 138-142.

²²⁴ *Once upon a Number: The Hidden Mathematical Logic of Stories*, John Allen Paulos, Basic Books, 1998, p. 116-118.

5.6 Tomada de Decisões (Ir)racionais como Base para a Acção e Estratégias de Teoria do Jogo.

A escolha da acção ou da linha de acção reside no âmago do comportamento humano, tanto na actualidade, como na narrativa ficcional. A tentativa de sugerir as normas de conduta mais aconselhadas (optimizar) e as melhores escolhas para linha de acção numa dada situação são conseguidas recorrendo a dois sistemas de matemática aplicada: escolha racional/teoria da escolha e teoria do jogo. Numerosos estudos psicológicos têm sido conduzidos para determinar em que grau a tomada de decisão humana coincide com as normas abstractas racionais, e todos eles indicam que o ser humano não reconhece, em dadas circunstâncias, a probabilidade Bayesiana²²⁵. Seria interessante observar até que ponto as análises e modelos oferecidos por estes sistemas poderiam ajudar-nos, como leitores e académicos, a conceptualizar situações de escolha numa narrativa, e em que medida o comportamento dos agentes narrativos, ilustrados em qualquer situação particular, artisticamente construídos, seguem ou se desviam das normas sugeridas pelos dois sistemas.

A teoria da decisão racional preocupa-se com a melhor maneira de tomar decisões e resolver problemas em situações em que existe um conhecimento incompleto, logo incerteza, envolvendo um ou mais agentes. Esta é a situação, tanto na vida, como na narrativa artística. Mais uma vez, a teoria da decisão pode fornecer distinções que nos permitam descrever melhor a situação epistémica de uma determinada personagem, e avaliar qual a proximidade a que se encontram, das normas desenvolvidas pela teoria, os seus processos de decisão. Por exemplo, a teoria tem a seguinte máxima: “Só o futuro conta”. No entanto, é interminável o número de personagens literárias, cujo raciocínio e decisões estão amaldiçoados pelas circunstâncias em que não reconhece determinados princípios (probabilidade Bayesiana), ou condicionados, em seu próprio prejuízo, por associações passadas, ligações e obsessões.

A maioria dos argumentos, da narrativa ocidental, baseia-se no conflito, cuja causa é, habitualmente, fruto da competição entre dois ou mais agentes, por algum objecto ou objectivo desejado, da noiva ao tesouro, do poder ao *status*. O objectivo do jogo é, obviamente, a obtenção do desejado. Então qual deveria ser a estratégia óptima, a adoptar por um dado jogador: confrontação,

²²⁵ Thomas Bayes (1701-1761) foi um pastor presbiteriano e matemático inglês (pertencente à minoria calvinista em Inglaterra), conhecido por ter formulado o caso especial do teorema de Bayes. Bayes foi eleito membro da Royal Society em 1742.

O teorema de Bayes é um corolário do teorema da probabilidade total que permite calcular a seguinte probabilidade:

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(B|A) \Pr(A)}{\Pr(B)}$$

A ideia principal é que a probabilidade de um acontecimento *A se ocorre um acontecimento B* depende não apenas do relacionamento entre os acontecimentos A e B, mas também da probabilidade marginal (ou "probabilidade simples") da ocorrência de cada um deles.

decepção, formar uma aliança com alguém ou batalhar sozinho, arriscar tudo num único gesto, ou fazê-lo incrementalmente? Assim, o que um jogador deve fazer depende do que os outros fazem, ou não conseguem fazer. A teoria matemática do jogo foi desenvolvida nos anos 40, para elaborar modelos de conflito e cooperação entre decisores racionais, cujas decisões fossem interdependentes. Nestas situações de decisão interactiva, os resultados dependem do próprio comportamento (escolhas, acções) e do comportamento de outro ou outros decisores. Na teoria do jogo os resultados são quantificados em termos probabilísticos, o que não acontece na narrativa. Contudo, tanto a narrativa como o teatro são fontes inesgotáveis de casos de interacção humana que podem ser conceptualizados em termos de teoria dos jogos (um exemplo primordial são as peças políticas teatrais²²⁶ de Shakespeare²²⁷). A teoria dos jogos assume o comportamento racional e começa por estabelecer a norma de cada jogador, em cada uma das suas acções e na sua estratégia no seu todo, procurando maximizar a sua utilidade para o próprio. Usando informalmente a teoria do jogo, pode-se avaliar a conduta de uma personagem, numa dada situação, como total ou parcialmente racional ou irracional.

Curiosamente, a literatura está repleta de exemplos de comportamento irracional de vários tipos, do altruístico ao autodestrutivo. Um exemplo extremo é o desafiante comportamento irracional do homem misterioso de Dostoievsky, que reconhece o que é do seu interesse, mas age sempre de forma oposta (não indo ao médico, insultando a mulher que lhe mostra gratidão), só para mostrar que se pode, com sucesso, rebelar contra a “tirania da razão”, que é obviamente impessoal, em nome do capricho individual²²⁸. E o mesmo é válido para o acto gratuito no existencialismo.

6. Conceitos Matemáticos, Modelos e Métodos nas Teorias da Narrativa.

Nesta altura, mude-se de nível, do discurso literário propriamente dito, para um metadiscurso sobre o discurso literário, da narrativa e da matemática para as teorias da narrativa e da matemática. Todas as empresas teóricas, por detrás de um certo grau de abstracção, complexidade e elaboração, têm de usar alguns conceitos, instrumentos ou modelos, lógicos ou matemáticos (incluindo, claro, ciência computacional). De facto, esta utilização constitui um bom indicador do grau de maturidade da disciplina. No entanto, como se sabe, existem muitos ramos e áreas da matemática e várias áreas da

²²⁶ “All the world is a stage, and all the men and women merely players.” in *As You Like It*, Act II, Scene 7, <<http://shakespeare.mit.edu/asyoulikeit/full.html>>

²²⁷ William Shakespeare (1564-1616), poeta e dramaturgo inglês. As suas primeiras peças teatrais consistiam em comédias e histórias. Mais tarde escreveu tragédias, aproximadamente até 1608, incluindo Hamlet, Rei Lear, Otel e Macbeth, consideradas das mais refinadas obras em língua inglesa. Na última fase da sua vida, escreveu tragicomédias, também denominadas romances, tendo colaborado com outros autores.

²²⁸ “Creio sofrer de uma enfermidade de fígado. Aliás, não percebo nada desta moléstia e ignoro a sua natureza. Não me trato e nunca me tratei, apesar da estima que professo pela medicina e pelos médicos. [...] Não, não quero tratar-me, e isto por birra. [...]”

- Falarei por ti, minha pequena. Vieste porque outro dia te disse “frases inspiradas pelo dó”. Ficaste enternecida, mas previno-te de que, depois, trocei de ti.” in “No Meu Subterrâneo”, *O Jogador e Outras Obras*, Fiodor Dostoievski, trad. Maria Franco, Estúdios Cor, 1965, p. 5, 106.

teoria narrativa, do estilo à estruturação do discurso, a composição, a estrutura do enredo, as inter-relações entre os agentes narrativos, os mundos e submundos ficcionados, os temas, os métodos de narração, e a relação entre o texto e o leitor (da recepção ao hipertexto). Em princípio, e provavelmente também na prática, foram utilizados, em qualquer uma destas áreas, pelos respectivos académicos, mais do que um conjunto de noções matemáticas, e serão usados mais no futuro (os métodos estatísticos podem ser usados quase em qualquer área do conhecimento).²²⁹ Refiram-se apenas, então, porque é que a característica mais básica e universal de todas as narrativas parece feita expressamente para uma representação matemática.

Todas as narrativas são constituídas pela dualidade do que se conta e como se conta, narração e narrado, por uma sequência de sinais ou de actos discursivos, representando uma sequência temporal de estados e eventos (mudanças de estado). Agora, as duas sequências podem ser representadas por vectores (comprimento, direcção e sentido), e a relação entre eles pode ser representada como um mapeamento onde pontos ou segmentos do narrado são colocados nos da narração. Podemos imaginar o autor tradicional com uma história em mente e muitas formas à sua disposição para o fazer, podendo o enredo ser verbalizado com muitas ordens diferentes, graus de detalhe e repetição, etc.. A relação do narrado para a narração é de um para muitos. Muita da narratologia estruturalista preocupa-se, de facto, com o cálculo das várias possibilidades de mapeamento das relações entre as duas sequências. O leitor, por outro lado, tenta reconstruir mentalmente uma sequência (temporal) unívoca e total do contado, a partir da forma como se conta e, como se viu, o seu sucesso pode ser, por vezes, apenas parcial, devido às características inerentes a uma determinada maneira de narrar uma história.²³⁰

²²⁹ Seria provavelmente um projecto para publicação realizar um inventário de que conceitos e métodos matemáticos têm sido usados, em todas e em cada uma destas áreas, até ao presente, e qual o sucesso que têm tido. Também seria necessário estar atento ao grau de sofisticação dos modelos desenvolvidos, das simples tipologias ou taxonomias (subordinação, inclusão) dos processos narrativos, à elaboração de algoritmos criadores de histórias através da computação.

²³⁰ “...a literatura é de facto um jogo combinatório, que segue as possibilidades implícitas na sua matéria-prima, independentemente da personalidade do poeta, mas é um jogo que [...] se encontra investido de um significado inesperado...[...] A máquina literária pode efectuar todas as permutas possíveis num dado material; mas o resultado poético será o efeito particular de uma dessas permutas sobre o homem dotado de uma consciência e de um inconsciente [...], será o choque que só se verifica enquanto existirem, em torno da máquina escrevente, os fantasmas ocultos do indivíduo e da sociedade.” in *Ponto Final*, Ítalo Calvino, Teorema, 1995, p. 221.

3 Um percurso histórico e pedagógico.

3.1 Introdução.

Este capítulo nasce da inquietação conceptual que percorre esta tese e constitui-se como um exemplo de uma reflexão sobre problemas pedagógicos, recorrentes na história da educação Matemática, fruto da natureza formal da sua própria construção. Identificados os processos que necessitam de ser alterados, nessa construção, de forma a diminuir o atrito que existe entre a formulação axiomática da Matemática e a transmissão dos seus conceitos, será apresentada, nos capítulos seguintes, uma proposta que tenta esbater esse problema.

Não se enquadra como objecto de estudo, nesta tese, a pedagogia do conhecimento científico matemático, baseada no estudo dos meios facilitadores da compreensão de provas da veracidade ou falsidade das proposições matemáticas, através da utilização dos instrumentos disponíveis; a pedagogia do conhecimento filosófico da matemática, ligado à construção de ideias e conceitos, constitui o que releva, para esta tese. Um mesmo conceito ou ideia pode ser expresso em muitas linguagens. O facto de o conceito ser de algum modo independente da linguagem torna possível a tradução – palavras em diferentes línguas, por exemplo, podem ter o mesmo significado porque exprimem o mesmo conceito. Os conceitos ou ideias ajudam a integrar observações, fenómenos, axiomas, teoremas e objectos, aparentemente não relacionados, em hipóteses e teorias viáveis, cuja criação constitui o objectivo básico da ciência. Mas muito mais podemos dizer sobre essas ideias:

São essas ideias imortais que fazem o progresso da humanidade, e é na força com que se batem por elas que reside o valor moral dos homens e das gerações.

Mas há outra categoria de ideias – aquelas que, não tendo poder de vitalidade que lhes permita viver após a criação de outras, conseguem no entanto sobreviver-se a si próprias, transformando-se em fantasmas do que eram. Esse grupo das ideias fantasmas é aquele em cujo nome se fere a luta contra as ideias criadoras. A sua frente está virada para o passado, e é para o seu passado que querem levar as sociedades, esperando assim reencontrar o ambiente que lhes restitua a vida que perderam.

Que homem há que não tenha notado à sua volta o efeito paralisador das ideias fantasmas e as não tenha sentido a batalhar mesmo dentro de si próprio, procurando subjugar-lo, arrastá-lo para aquelas regiões sombrias onde não chega a luz fulgente das ideias imortais?²³¹

A cristalização das ideias e conceitos matemáticos, agrilhoados em formatos enlatados, resultam da tendência normalizadora que existe e funciona quando as ideias mantêm o seu prazo de validade por um período razoável de tempo. Quando essa normalização não responde às necessidades políticas ou sociais, criam-se instrumentos de questionamento e mecanismos para identificar a génese dos problemas.

²³¹ “Galileo Galilei, Valor Científico e Valor Moral da sua Obra”, *Conferências e Outros Escritos*, Bento de Jesus Caraça, Gradiva, 1933, pp. 95-96.

...pela análise das leis e das reformas que se encadearam, podemos em muitos casos surpreender a explicação correcta de certos factos que antes nos pareciam de significado obscuro e impreciso.²³²

A criação do Ministério da Instrução Pública em 1870 e a necessidade de aferir a qualidade de um ensino que se tinha generalizado e expandido, sem o correspondente investimento na formação pedagógica dos professores, levou à criação de instrumentos que recolhessem os dados necessários à identificação das dificuldades e inconsistências do sistema de ensino.

Desde finais do século XIX foi notória a necessidade de relatórios de reflexão e análise – relativamente à actividade pedagógica nas escolas –, como forma de perceber a eficácia dos métodos e instrumentos aplicados no desempenho da função docente. A mais antiga exigência deste tipo está contida no Regulamento para os Liceus Nacionais de 1873, assinado por Rodrigues Sampaio²³³. Este regulamento foi aprovado 6 meses após ter sido elaborado, em 23 de Setembro de 1872. Entre os "deveres" que ali eram atribuídos aos professores, constava a elaboração de "um relatório em cada ano" sobre "o método que seguiram no ensino, aplicação que fizeram do programa, dificuldades que encontraram nessa aplicação, progresso do estudo que lhes está confiado", bem como outras informações acerca do "adiantamento e instrução dos alunos" (Decreto de 31/3/1873). Após a sua implementação, Rodrigues Sampaio não alterou esse decreto, apesar de mandar criar uma comissão, em 1876, tendo em vista a sua reforma.

É nesta década que é criada a *Cartilha Maternal*, de João de Deus²³⁴ – poeta sem formação em pedagogia²³⁵. A sua principal inovação foi distinguir as sílabas através da utilização de tipos diferentes de letra no seu arranjo tipográfico, que muitos críticos apontavam como prejudiciais para a visão das crianças. Mas o sucesso foi tão grande que veio validar que, neste caso, a nova forma de

²³² *Notas para a História do Ensino em Portugal*, Luís Albuquerque, Vol.1, Textos Vértice, 1960, p. 7.

²³³ António Rodrigues Sampaio (1806 – 1882). Jornalista e político português que, entre outras funções, foi deputado, par do Reino, ministro e presidente do Conselho (chefe de governo). Rodrigues Sampaio foi um dos maiores vultos do liberalismo português de oitocentos, jornalista e parlamentar. Personalidade controversa, polémica, mesmo revolucionária, mas sempre coerente e fiel aos seus princípios e desígnios, foi um agitador de renome nacional, o que lhe valeria a alcunha de o Sampaio da Revolução, já que se notabilizou como redactor principal do periódico *A Revolução de Setembro*. Era um jornalista de causas, não de notícias, como aliás era o jornalismo do século XIX. Apesar da violência verbal e da forma assertiva que sempre utilizou nos seus ataques políticos, Rodrigues Sampaio nunca promoveu o ataque pessoal. Mesmo quando os seus correligionários lhe pediram que pusesse em causa a dignidade e honradez de D. Maria II e da Corte, negou-se terminantemente, escrevendo que um antro de corrupção política não faria da Corte um lugar de devassidão moral. Foi esta postura de grande escrupulo, associado a um incansável labor na defesa dos valores pelos quais pugnava, que lhe concede um lugar cimeiro no jornalismo político português.

²³⁴ João de Deus de Nogueira Ramos (1830 – 1896), mais conhecido por João de Deus. Eminentíssimo poeta lírico e pedagogo, considerado à época o primeiro do seu tempo, e o proponente de um método de ensino da leitura, assente na *Cartilha Maternal*, por ele escrita, que teve uma grande aceitação. Gozou de extraordinária popularidade – foi quase um culto – sendo, ainda em vida, objecto das mais variadas homenagens. Foi considerado o poeta do amor e encontra-se sepultado no Panteão Nacional da Igreja de Santa Engrácia, em Lisboa. Será pela *Cartilha Maternal*, oferecida por um trabalhador rural de nome José Percheiro, que Bento de Jesus Caraça aprenderá a ler e a escrever.

²³⁵ *História do Ensino em Portugal*, Rómulo de Carvalho, Fundação Calouste Gulbenkian, 1986, p. 607.

ensino beneficiou a aprendizagem dos conteúdos. Mais do que isso, o industrial Casimiro Freire²³⁶ – um dos fundadores do primeiro centro republicano –, apoiado por um grupo de republicanos influentes, criou a escola móvel, pedagogicamente suportada na *Cartilha Maternal*, mas que serviu também para a recolha de apoios para a causa republicana. Estas escolas móveis foram criadas também nas ilhas, no Brasil e nos territórios africanos de Portugal e estiveram activas durante mais de quarenta anos²³⁷.

Nessa década também se inicia a publicação do Anuário Estatístico do Reino de Portugal, que passa a fornecer informações estatísticas sobre o ensino em Portugal, de uma forma nem sempre regular.

A imposição legal de relatórios anuais da actividade lectiva, elaborados por cada professor, manter-se-ia em diversas reformas posteriores. Contudo, surge em 1935 a questão da selecção dos professores - "um dos mais graves problemas do ensino secundário" – fazendo ressurgir a obrigatoriedade do relatório – que muitas vezes não era apresentado, até então. A justificação apresentada foi a de que era necessário encontrarem-se formas objectivas de apreciar a competência profissional da classe. Uma ordenação classificada dos docentes, somente obtida a partir dos diplomas académicos e profissionalizantes, parecia insuficiente às autoridades da época. Não deveriam bastar os conhecimentos teóricos para a progressão na carreira; havia que encontrar maneira de consagrar e de valorizar de facto "o tempo de bom e efectivo serviço". Neste assunto delicado, e uma vez mais, o Governo só deliberou após "ouvida a classe dos professores liceais". A análise da prática seria toda ela feita a partir de um relato circunstanciado. A visibilidade externa do trabalho dos professores agregados com os seus alunos tenderia a aumentar ainda mais. Tratava-se de associar directamente o discurso e a promoção profissional. A luta pelo provimento de um lugar efectivo na carreira passava pela apresentação de uma descrição em que ficasse demonstrada a adequação do respectivo professor aos grandes princípios e metas que norteavam o liceu: cada um daria conta da forma como planificara as aulas, as metodologias pedagógicas adoptadas, o rendimento que obtiveram e, ainda, a participação livre e empenhada em actividades extracurriculares (Decreto 25078, de 26/2/1935). No Arquivo Histórico do Ministério da Educação encontram-se alguns exemplares destes relatórios, mas sem os pareceres que os deviam acompanhar. E esse espólio contém apenas 145 documentos no total, em referência ao período que medeia os anos lectivos de 1934-35 e 1938-39. O acervo não é muito significativo do conjunto da população de professores então existentes. No entanto, o rigor e generalização na aplicação dos mesmos só se tornariam efectivos após 1947, com a criação da Inspeção do Ensino Liceal e com a sua intervenção directa na classificação dos docentes (Decreto

²³⁶ Casimiro Freire (1843 – 1918), mecenas e filantropo, com um profundo interesse pela causa da educação, foi um dos maiores admiradores de João de Deus, tendo contribuído fortemente para a expansão do seu método de ensino da leitura. Oriundo de uma humilde família beirã, emigrou na juventude para Lisboa, onde fez fortuna e se tornou um próspero comerciante e industrial.

²³⁷ *História do Ensino em Portugal*, Rómulo de Carvalho, Fundação Calouste Gulbenkian, 1986, p. 607-613.

36508, de 17/9/1947). No primeiro ano lectivo em que a medida produziu efeito, o de 1948-49, existem 117 relatórios, ou seja, quase tantos quanto os existentes para os quatro anos do período anterior.

Serão considerados 3 relatórios de Rómulo de Carvalho²³⁸ e 8 relatórios de Maria Teodora Batista Alves²³⁹ – existem mais relatórios, mas não foi possível obter outros, nomeadamente o do ano lectivo 48/49 de Maria Teodora Alves, por ela mencionado no relatório de 49/50, uma vez que, ou não existem, ou não se encontravam catalogados na altura em que foram consultados no Arquivo Histórico do Ministério da Educação –, dos quais serão extraídas algumas questões pertinentes. Estes autores foram escolhidos pelo facto de ambos terem participado activamente na *Gazeta de Matemática*. Encontram-se patentes nesses relatórios as preocupações com a transmissão dos conceitos e suas consequências para o indivíduo e para a sociedade em que se insere mas, acima de tudo, com o problemático papel central que os elementos formais possuíam na prática pedagógica. No entanto, muitos outros professores também elaboraram os seus relatórios, que se encontram no supracitado Arquivo Histórico do Ministério da Educação – por exemplo, J. Alemão (1953)²⁴⁰ ou M.E. Barroco (1949)²⁴¹.

A *Gazeta de Matemática*, resultado de um momento histórico em que se reuniu, em Portugal, um conjunto dinâmico e activo de inspirados matemáticos²⁴², foi fundada por Bento de Jesus Caraça (1901-1948)^{243,244}, António Aniceto Monteiro (1907-1980), Hugo Ribeiro (1910-1988), José da Silva

²³⁸ Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 5, nº292, manuscrito não publicado, Lisboa; Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 49, nº2322, manuscrito não publicado, Lisboa; Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 2, nº107, manuscrito não publicado, Lisboa.

²³⁹ Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 14, nº 779, manuscrito não publicado, Lisboa; Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 17, nº630, manuscrito não publicado, Lisboa; Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 17, nº937, manuscrito não publicado, Lisboa; Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 19, nº1133, manuscrito não publicado, Lisboa; Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 23, nº1304, manuscrito não publicado, Lisboa; Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 26, nº1437, manuscrito não publicado, Lisboa; Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 29, nº1574, manuscrito não publicado, Lisboa; Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 33, nº1756, manuscrito não publicado, Lisboa.

²⁴⁰ Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 19, nº 1108, manuscrito não publicado, Lisboa.

²⁴¹ Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 5, nº 312, manuscrito não publicado, Lisboa.

²⁴² Nos anos 40 existiu em Portugal um grupo de matemáticos portugueses com uma actividade científica e pedagógica assinalável. A actividade deste núcleo traduziu-se no aparecimento sucessivo da *Portugaliae Mathematica* (1937), do Seminário Matemático de Lisboa (1938), do Centro de Estudos de Matemáticas Aplicadas à Economia (1938), da *Gazeta de Matemática* (1939), do Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa e do Porto (1940 e 1942, respectivamente) e da Sociedade Portuguesa de Matemática (1942).

²⁴³ Bento de Jesus Caraça (1901-1948). Fundador da *Gazeta de Matemática*, da *Biblioteca Cosmos*, do Núcleo de Matemática, Física e Química. Presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática e Professor de Matemática no actual I.S.E.G.. Desenvolveu uma grande actividade cívica e pedagógica até à sua morte.

Paulo (1905-1976) e Manuel Zaluar Nunes (1907-1967), com o objectivo de divulgar a cultura matemática, estimulando o gosto pelo seu estudo, assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou possui algum interesse pela matemática. Esta constituiria a 1ª série, que iria de 1940 a 1976, com 136 números, individuais ou agrupados, e alguns especiais, inclusive dedicados ao ensino da matemática²⁴⁵ sendo, ainda hoje, uma publicação regular da Sociedade Portuguesa de Matemática. Será sobre esta série que incidirão as reflexões e análises, constantes deste capítulo. Tendo em conta os diversos artigos que se debruçaram sobre pedagogia – analisando práticas de ensino, cumprimento de programas, comportamento dos alunos perante as matérias leccionadas, sucesso ou insucesso e questões relacionadas com a conceptualização do ensino, propondo diversas alterações e fomentando debates –, iremos abordar alguns deles, nomeadamente os considerados mais relevantes para uma análise da conceptualização da pedagogia matemática, dado constituírem um quadro pertinente para esta tese. Observa-se, da leitura de alguns dos artigos iniciais, a necessidade de questionar um ensino cristalizado, cuja preocupação se remetia às questões práticas de aplicação de um modelo pedagógico, que poderia já não responder às necessidades reais dos alunos e da sociedade. Consta-se, pela recolha dos artigos da *Gazeta de Matemática* – relativos ao ensino da matemática, à prática pedagógica, à filosofia da matemática ou à temática de matemática e sociedade²⁴⁶ –, que eram numerosos os artigos, nos números da *Gazeta de Matemática* até 1950²⁴⁷, que reflectiam dúvidas e um aguçado espírito crítico relativamente às concepções vigentes de ensino de matemática e relações com os seus fundamentos, história e cultura. Algo que foi progressivamente abandonado²⁴⁸, de uma forma que pode ter implícitas uma pacificação e uma normalização desses aspectos fundamentais da disciplina, acarretando precisamente a cristalização com a qual se debateu no início da sua existência, em virtude das renovadas minudências próprias da tecnocracia – as perseguições políticas de que

²⁴⁴ Bento de Jesus Caraça foi responsável pela secção de pedagogia, durante os primeiros anos de existência da *Gazeta de Matemática*. A sua visão sobre a matemática e as ideias tiveram reflexos na escolha dos artigos e na sua postura socialmente interventiva, procurando suscitar um debate crítico sobre a matemática e estimular a criatividade, perante o conhecimento. Nas palavras do Professor:

“...considerada a Matemática como um todo em evolução, lhe desaparece inteiramente o carácter de domínio fechado e bastando-se a si próprio e, pelo contrário, se descortinam bem claramente as ligações àquele conjunto comum de preocupações, problemas e realizações que determinam, em última análise, a marcha do pensamento e da civilização.” in *Bento de Jesus Caraça – Conferências e Outros Escritos*, Gradiva, 2008, p.349.

“Caraça tinha a clara consciência daquilo a que chamava “o poder revolucionário de uma ideia”, mensurável “pelo grau em que ela interpreta as aspirações gerais, dadas as circunstâncias do momento em que actua”...” in *Bento de Jesus Caraça – Militante Integral do Ser Humano*, Alberto Vilaça, Campo de Letras, 2000, pp. 24-25.

²⁴⁵ *Gazeta de Matemática*, nº 76-77, Livraria Sá da Costa, 1959, Setembro/Dezembro, por exemplo, dedicada ao ensino secundário e superior da Matemática.

²⁴⁶ Foram identificados 93 artigos considerados enquadrados nestas temáticas.

²⁴⁷ *Gazeta de Matemática* – Lista de autores e artigos, por fascículo, Sociedade Portuguesa de Matemática, 1989.

²⁴⁸ De 1940 a 1950 encontram-se 62 artigos, de 1950 a 1960 encontram-se 18 artigos e de 1960 a 1976 encontram-se 15 artigos.

foram alvo alguns dos seus fundadores e a morte de Bento de Jesus Caraça também terão tido influência na progressiva alteração do discurso e das temáticas abordadas.

Um primeiro debate²⁴⁹, suscitado por Bento de Jesus Caraça, surge do problema – que, segundo o autor, “não sei se foi já tratado convenientemente” – da “coordenação entre o Ensino Secundário e o Superior”. A propósito desta problemática, existem intervenções de outros autores, em números posteriores da mesma publicação, identificando vários factores que dificultam essa coordenação. Mais do que isso, algumas dessas reflexões ultrapassam o âmbito estrito da relação entre os dois níveis de ensino; debatem conceptualmente alguns aspectos fundamentais do ensino da matemática, nomeadamente a correlação da matemática com outras áreas científicas, a questão da compreensão dos conceitos, a questão da formação dos professores, da estruturação dos currículos, etc.. Entre esses autores encontramos António Augusto Lopes²⁵⁰, Hugo Ribeiro²⁵¹, Rómulo de Carvalho²⁵², Maria Teodora Alves²⁵³, Laureano Barros²⁵⁴ e Fernando Soares David²⁵⁵. O objectivo será enunciar alguns desses constrangimentos e, posteriormente, analisar o seu desenvolvimento histórico e consequências na transmissão de conceitos matemáticos.

Um segundo debate levou a uma análise, realizada por outro conjunto de autores, ao ensino da Matemática em outros sistemas de ensino europeus – nomeadamente o alemão e o italiano –, de onde resulta a identificação de características ou sugestões que, adaptadas ao sistema de ensino da Matemática português, poderiam solucionar alguns dos seus problemas intrínsecos. No conjunto desses autores, foram escolhidos nomes incontornáveis como José Sebastião e Silva²⁵⁶ e Emma

²⁴⁹ “Algumas reflexões sobre os exames de aptidão”, Bento de Jesus Caraça, *Gazeta de Matemática*, nº 17, Livraria Sá da Costa, 1943, Novembro.

²⁵⁰ António Augusto Lopes (1903-1978). Professor do Liceu Normal D.Manuel II, no Porto, e autor de alguns dos primeiros livros de texto adoptados após a reforma do ensino de 1947. A primeira lista de manuais aprovados, com validade de cinco anos, foi publicada em 21 de Junho de 1950. Entre eles encontrava-se *Compêndio de Álgebra*, de António Augusto Lopes, para o 3º Ciclo do Ensino Liceal.

²⁵¹ Hugo Ribeiro (1910-1988). Secretário-Geral da *Gazeta de Matemática*; Bolseiro na Universidade Federal de Zurique, Professor na Universidade de Berkeley, Universidade de Nebraska e Universidade da Pensilvânia.

²⁵² Rómulo Vasco da Gama de Carvalho (1906-1997), professor de Química e Física, poeta, investigador, historiador, escritor, fotógrafo, pintor, ilustrador e membro da Academia das Ciências de Lisboa (1992). Destaca-se a sua participação como director da *Gazeta de Física*, de 1946 a 1974, bem como a obra *História do Ensino em Portugal, desde a fundação da nacionalidade até ao fim do regime de Salazar-Caetano*, editada em 1986.

²⁵³ Maria Teodora Alves (-). Professora do Liceu Passos Manuel e no Liceu D. Amália, em Lisboa. Publicou artigos em revistas da especialidade sobre Educação Matemática.

²⁵⁴ Laureano Barros (1921-2009). Coleccionador de livros (mais de 6000 lotes leiloados após a sua morte), matemático e leitor.

²⁵⁵ Fernando Soares David (1922-1990). Matemático e engenheiro electrotécnico, vencedor do 1º Prémio Nacional Gomes Teixeira. Teve que concluir o curso de engenharia, uma vez que não lhe foi atribuída bolsa de investigação em Matemática, nas várias tentativas feitas por Ruy Luís Gomes, devido à entrevista dada após receber o prémio, criticando o ensino da matemática em Portugal.

²⁵⁶ José Sebastião e Silva (1914-1972). Director do Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, Professor no Instituto Superior de Agronomia e na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e Presidente da Comissão para a Modernização do Ensino da Matemática nos Liceus Portugueses, para além de possuir uma extensa obra matemática.

Castelnuovo²⁵⁷. Dessa análise, identificam-se algumas questões que influem na assimilação de conceitos ou ideias matemáticas e que constituem razões válidas para as diferenças de resultados entre os sistemas de ensino comparados.

A partir da análise efectuada com os dois exercícios anteriores, sustenta-se a proposta que será apresentada subsequentemente, tendo em vista a resolução de algumas das insuficiências patenteadas pelo ensino da Matemática em Portugal e reconhecidas por muitos autores distintos do panorama português. Verifica-se que em publicações muito posteriores – nomeadamente em *A divergência entre a avaliação contínua e os exames nacionais de Matemática - 1993-1994*²⁵⁸ e até em obras contemporâneas – algumas dessas insuficiências do ensino da Matemática se mantêm e são questionadas, principalmente pela preocupação central nos seus aspectos formais, em detrimento de uma compreensão e transmissão mais profundas das ideias e conceitos que lhe estão subjacentes.

Assim, procurar-se-á explicitar como a aplicação continuada, do ponto de vista histórico, de uma certa forma de entender a Matemática, no contexto da cultura geral dos conceitos matemáticos, forjou um meio propício a erros recorrentes, nomeadamente na “normalização” deformadora das ideias matemáticas, imprimida na aplicação de métodos pedagógicos no ensino da Matemática.

3.2 Dos relatórios de actividade docente de Maria Teodora Alves e Rómulo de Carvalho.

No ano lectivo de 1934/1935 – antes da reforma curricular de 1947 –, Rómulo de Carvalho lecciona no antigo Liceu Camões, elaborando um relatório²⁵⁹ que, muito para além de descrever as actividades e metodologias implementadas nas suas turmas, reflecte sobre a sua natureza e pertinência. A propósito de uma turma de 2ª classe que lhe foi atribuída, para a qual não sentia possuir a preparação adequada, afirma Rómulo de Carvalho, numa pequena crítica velada:

Não trazia assim, de antemão, preparado qualquer método que pudesse aplicar taxativamente como tantas vezes se pretende e que transforma o papel de professor, dando-lhe um automatismo prejudicial, desde que ele não tenha em si outras qualidades inatas e indefiníveis que estão acima dos métodos e das teorias.

Estas qualidades poderão não ser assim tão inatas e indefiníveis. Como perpassa pelo caminho que tem sido trilhado neste texto, a capacidade e o método de ensinar, recorrendo a uma narrativa coerente, em sintonia com as características e vivências dos alunos e com a multiplicidade de trajectos

²⁵⁷ Emma Castelnuovo (1913- 2014). Matemática e pedagoga italiana, que desenvolveu trabalhos sobre o ensino da Geometria, nomeadamente *Geometria intuitiva, per le scuole medie inferiori* (1948, Carrabba) *Didattica matematica* (1963, La Nuova Italia), *Documenti di un'esposizione matematica* (1972, Boringhieri) *Matematica nella realtà* (con Mario Barra, 1976, Bollati Boringhieri) *La matematica* (1976, La Nuova Italia) *Pentole, ombre, formiche. In viaggio con la matematica* (1993, La Nuova Italia) ou *L'officina matematica. Ragionare con i materiali*. (2008, La Meridiana).

²⁵⁸ *A divergência entre a avaliação contínua e os exames nacionais de Matemática - 1993-1994*, Joana Castro, Jorge Maia, Instituto de Inovação Educacional, 1996.

²⁵⁹ Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 49, nº2322, manuscrito não publicado, Lisboa.

que se apresentam no seu futuro, constitui algo que pode ser adquirido e que radica em todo o ser humano – como será observado no capítulo seguinte. Aliás, atente-se ao que afirma Rómulo de Carvalho, ainda a propósito dessa turma:

A falta de prática e a falta de método previamente escolhido foram os dois grandes blocos que tornaram a construção difícil mas que, depois de domados e lapidados, forneceram os próprios materiais para ela.

Mais do que isso, a narrativa que se vai construindo em diálogo com os outros e com o que se aprende mostra ser de fundamental importância na motivação dos alunos, sem que se perca o rigor e profundidade pretendidos:

É afinal o método heurístico fortemente dirigido à observação directa da matéria que interessava de momento.

Aproveitando as excelências do método, o meu intuito era criar gosto; expulsar, por completo, do espírito dos rapazes, a ideia de que ir para a aula era uma maçada e, estar na aula, maçada muito maior; dar-lhes a impressão de que o assunto era accidental e não previamente estipulado; habituá-los à observação mais minuciosa que um espírito infantil pode suportar e, finalmente, dar-lhes a noção de que o estudo é simples e é alegre.

Assim descrito é possível que se encontre, neste modo de aprender, uma superficialidade na assimilação dos conhecimentos apenas útil para um outro aluno de maior poder analítico (para a observação) e sintético (para a recolha das conclusões úteis). Esta superficialidade é aparente [...] o programa foi satisfeito, vagarosamente, ordenado e sem atropelos, apenas com a intromissão de aditamentos a que o estado dos rapazes me obrigou.

Mas também os programas suscitavam dúvidas e embaraços, na medida em que não se mostravam dinâmicos e articulados. A compartimentação dos conteúdos, sem a devida reflexão e ligação, torna o conhecimento enciclopédico. Disto dá conta Rómulo de Carvalho:

Não procuramos nós, nos Liceus, o máximo de relações, de induções e de deduções nas Ciências para facilidade de estudo?

No relatório apresentado em 1948²⁶⁰, Rómulo de Carvalho debruça-se sobre a falta de informação e visão deturpada que a sociedade em geral tem do ensino, mostrando como a exigência, própria de uma comunidade que reconhece no ensino o seu papel fundamental e determinante da evolução da mesma, se reflecte na forma como evita a manipulação, através da informação factual e dos diagnósticos atempados e céleres resoluções dos problemas que se lhe apresentam:

O público que, infelizmente, tem opiniões firmes sobre assuntos que desconhece por completo, deveria ser informado, não por boatos, mas por pessoas abalizadas, das mais gerais conclusões

²⁶⁰ Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 5, nº292, manuscrito não publicado, Lisboa.

respeitantes ao ensino. Se, todos os anos, com tão louvável regularidade, o Governo nos informa do estado financeiro em que a Nação se encontra, mandando publicar nos jornais um relatório circunstanciado e claro sobre aquele assunto, por que não faz o mesmo para a Educação Nacional publicando, depois de terminados os exames, um relatório de apreciação geral que elucide os duvidosos, confunda os maldizentes e a todos conceda as informações necessárias à compreensão do assunto?

O ensino acaba por espelhar a falta de sentido crítico e de compreensão clara da realidade que, por vezes, enferma o contexto social que o envolve. Desse ponto de vista, a sociedade portuguesa da época padecia de mal semelhante, onde os próprios alunos apresentavam dificuldades em perceber os conceitos subjacentes aos instrumentos e formalismos que iam adquirindo:

Os alunos não sabem, e quando sabem não compreendem o que sabem (chamando agora saber ao simples enunciar). [...] A minha exigência consiste muito simplesmente em não desculpar que os alunos ignorem o que “sabem”. Será muito exigir a compreensão das suas afirmações? Penso que não e penso mais que, sem ela, é inútil todo o trabalho escolar dos alunos. Para mim, um dos aspectos mais graves do nosso ensino é exactamente o de permitir a comunicação sem a respectiva compreensão.

Também Maria Teodora Alves aborda este tópico, no seu relatório de 1954²⁶¹, onde cita Henry Fawcett²⁶²:

“Actual classroom practice indicates that the major emphasis is placed on a body of theorems to be learned, rather than on the method by which these theorems are established. The pupil feels that these theorems are important in themselves and in his earnest effort to “know” them, he resorts to memorization.”

Outra forma de divergência, entre o que se pretende que resulte do ensino e o que as prescrições dogmáticas implicam, encontra-se bem explicitada no relatório de Maria Teodora Alves de 1949/1950²⁶³:

A ordem prefixada às rubricas do programa e a determinação do Estatuto de que o professor não as pode alterar, impede qualquer correcção que o professor pudesse fazer às desconexões do programa de cada um dos anos. Somente um programa perfeito poderia merecer essa determinação. Mas a triste condição humana é incompatível com a perfeição das cousas e o actual programa [...] está muito longe da perfeição.

²⁶¹ Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 23, nº1304, manuscrito não publicado, Lisboa.

²⁶² Henry Fawcett (1833 – 1884). Académico, estadista e economista britânico, defensor do sufrágio universal.

²⁶³ Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 17, nº937, manuscrito não publicado, Lisboa.

Maria Teodora Alves observa, para além da insuficiente autonomia atribuída aos docentes, a problemática da articulação dos conteúdos e os aspectos mais relevantes a atender na elaboração dos currículos:

No ensino há dois aspectos distintos a considerar: os conceitos e a sua ordenação lógica e a técnica de cálculo e as aplicações. Se a função formativa da matemática é dada principalmente pelos conceitos e pela ordenação lógica, a técnica de cálculo e aplicações [...] é obtida quasi que exclusivamente pelos exercícios de aplicação. Todos os psico-pedagogistas que conheço unanimemente afirmam que a técnica do cálculo, em matemática, para ter segurança e não ser automática, tem de ser obtida com repetidos exercícios, em intervalos espaçados, mas sucessivos. [...] É neste sentido que Summer afirma que “In Secondary Modern Schools there should be no artificial separation of the mathematical subjects.”

Demonstra-se, assim, que a preocupação com a interligação entre conceitos matemáticos e com o ensino da aplicabilidade transversal das regras de cálculo já constituía um assunto de debate e reflexão em meados do século passado. Para além, disso, Maria Teodora Alves viria a referir, no seu relatório relativo a 1955²⁶⁴, a importância da experiência matemática individual do aluno na aprendizagem:

Por mais claras que sejam as ideias que o professor tenha dos conceitos que pretende transmitir às alunas, e por mais perfeita que seja a exposição desses conceitos pelo professor, só será possível a aluna adquirir com clareza necessária os conceitos, se a sua própria experiência for provocada, quer seja provocada por contraste de ideias ou, então, sensorialmente (visão, movimento, etc.).

Maria Teodora Alves procurava soluções pedagógicas nas experiências de vanguarda que se iam efectuando em outros países europeus, apelando para a divulgação e reflexão acerca dos métodos aí implementados e dos consequentes resultados obtidos:

A França, que era considerada em atraso pedagógico relativamente à Suíça e aos anglo-saxões, porque soube reconhecer o seu atraso, está a queimar rapidamente as etapas desse atraso, sendo prova a orientação seguida no liceu experimental de Sèvres. Não seria possível, por contacto oficial ou oficioso com esse instituto que nós, portugueses, tomássemos conhecimento dos resultados que lá têm sido obtidos e a que as revistas pedagógicas de mais categoria já se referem?

A escolha dos temas abordados neste subcapítulo obedeceu, por um lado, a uma ligação necessária com o subcapítulo subsequente, o qual ilustrará a expressão escrita das inquietações que emergiam da prática pedagógica dos docentes, na forma da *Gazeta de Matemática* e de outras publicações. Por outro lado, constituem também os temas transversais a este trabalho, inerentes ao problema da transmissão dos conceitos matemáticos. Refira-se que, não obstante as preocupações demonstradas nas críticas aos programas da disciplina ou à metodologia pedagógica, demonstrado

²⁶⁴ Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 26, nº1437, manuscrito não publicado, Lisboa.

pelos autores escolhidos, observa-se que, apesar da importância atribuída à compreensão das ideias matemáticas, não são por eles apresentadas alternativas a uma base substancialmente formal na transmissão do conhecimento matemático. Note-se ainda que o problema do insucesso escolar e do cumprimento do programa constituía a preocupação geral do Estado, bem como a utilização destes relatórios como instrumentos de controlo e implementação de uma mentalidade adequada ao Estado Novo – terminologia para a recentemente instalada ditadura. Este facto pode ter contribuído para uma homogeneização do conteúdo dos mesmos e a uma fuga posterior a uma reflexão mais profunda sobre o formalismo matemático.

Em cumprimento do Art 184.º 2.º do Estatuto do Ensino Liceal apresento o meu relatório de professora afregada.

Entrei em serviço no Liceu de Beja, no ano lectivo de 1950/51, em 6/10/1950 reatando um horário com 22 horas semanais, em correspondência com duas turmas de Matemática do 1.º ano, 3 turmas de Matemática do 3.º ano, 1 turma (turma A) de Desenho do 2.º ano, 2 turmas de Trabalhos Manuais do 1.º ano, subdivisões das turmas A e B e 2 turmas de Trabalhos Manuais do 2.º ano, subdivisões das turmas A e B.

Cumprimento dos programas: Os programas foram cumpridos, dada a imposição do Regulamento do Ensino Liceal.

De resto, um programa, por extenso, difícil ou dissenso que seja pode sempre cumprir-se; o que deve importar é a sua eficiência para a consecução dos objectivos da escola.

Em meus relatórios anteriores afirmei a existência de deficiências no programa de Matemática do 1.º ciclo e, na gazeta de Matemática, N.º 43 mostrei algumas defi-

3.1 Manuscrito do relatório de Maria Teodora Alves, referente ao ano lectivo de 1950/1951.²⁶⁵

²⁶⁵ Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 17, nº630, manuscrito não publicado, Lisboa.

3.3 Das questões emergentes do debate da coordenação entre o Ensino Secundário e o Superior.

Observando os resultados e as respostas dos alunos às questões do *Exame de Aptidão* de 1943, Bento de Jesus Caraça publica o artigo “Algumas reflexões sobre os exames de aptidão” na *Gazeta de Matemática*, procurando suscitar o debate em torno da identificação e resolução dos problemas pedagógicos – existentes no ensino da Matemática – e que dificultam a coordenação do ensino secundário e superior. Esta questão resultava de uma preocupação crescente com o problema da continuidade no sistema de ensino, na medida em que era percentualmente muito baixo o número de alunos que continuavam o seu percurso académico para o nível universitário. Segundo ele, a falta de espírito crítico e o *automatismo* eram as duas principais causas de algumas das insuficiências matemáticas apresentadas pelos alunos nesse exame.

Diante do problema, a primeira reacção é procurar a fórmula que se aplica [...] e atirar-nos com o resultado, não do problema, mas da aplicação da fórmula.²⁶⁶

Bento de Jesus Caraça deixa em aberto as razões inerentes a estes simplismos, desafiando outras contribuições em futuros números da *Gazeta*, o que veio ampliar o debate para outras questões relacionadas, como a formação de professores ou as correlações da matemática com outras disciplinas científicas. Percebe-se que, na época, era maior o enfoque por parte dos alunos nos mecanismos formais, do que no significado da ideia inerente, nos diferentes contextos em que se pode apresentar. No entanto, já existiam tentativas de alguns professores para evitar esse mal. Cite-se uma passagem fulcral de Rómulo de Carvalho²⁶⁷:

Tive sempre uma preocupação constante: convencê-los de que a Ciência, em particular a Física, não se decora: compreende-se. Só assim poderá o aluno chegar ao fim do ano conhecendo tão vasto programa.

Um aluno não sabe uma fórmula de cór? Não me interessa. Deduza-a. Fixá-la-à com a repetição do seu emprego em exercícios, por vê-la escrita no quadro durante as chamadas. O que me interessa é que saiba deduzi-la quando precisar utilizá-la. Para saber deduzi-la precisa compreender com toda a clareza o fenómeno a que ela se refere.²⁶⁸

Rómulo de Carvalho explicita este problema do ensino da Matemática, no artigo “Sobre a Correlação entre a Matemática e a Física no Ensino Liceal”, publicado na *Gazeta de Matemática*

²⁶⁶ “Algumas reflexões sobre os exames de aptidão”, Bento de Jesus Caraça, *Gazeta de Matemática*, nº 17, Livraria Sá da Costa, 1943, Novembro, p.8.

²⁶⁷ Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 49, nº2322, manuscrito não publicado, Lisboa.

²⁶⁸ Relatório do professor agregado do quadro do serviço eventual Rómulo Vasco da Gama Carvalho, 8º Grupo de Liceu Camões, Lisboa, Ano Lectivo 1934-35, *Manuscrito*, Ministério da Educação.

número 31. Segundo ele, não se deve estimular uma visão determinista da realidade, que tenha na Matemática um instrumento auxiliar:

Tudo aliás se conjuga para que o erro se mantenha e prolongue: o ensino de Matemática, os problemas que se escolhem, nas aplicações, para que nunca se fuja a resultado tão agradável [...] em que os valores numéricos são propositadamente escolhidos [...] de modo que tudo se resolva sem o menor esforço. Isto é deveras deseducativo, porque afasta completamente a escola, da vida.²⁶⁹

Para além do ensino para aquisição de conhecimentos e de técnicas, há o ensino para a formação mental dos alunos e a estes dois ensinos, que não se confundem, correspondem atitudes diferentes, quer de professores, quer de alunos. E. Bayles, que é unanimemente considerado um dos condutores da pedagogia moderna, a esse respeito, afirma: “Thinking and Knowing are not the same thing”.²⁷⁰

Este reducionismo a uma tipificação dos problemas constitui outra forma de impedir perspectivas mais abrangentes, que possibilitem uma compreensão profunda das ideias matemáticas.

Por outro lado, Maria Teodora Alves inicia em Portugal uma mudança de perspectiva na educação matemática²⁷¹. O formalismo matemático deve deixar de ser o objecto central da actividade de alunos e professores, passando as ideias matemáticas – e a sua assimilação e estruturação mental, por parte dos alunos – a ter um papel fundamental no desenvolvimento do trabalho pedagógico:

Se o ensino da Matemática for concentrado em si próprio e desligado das suas conexões com a vida, poderá formar peritos neste ramo do saber – não é o objectivo da escola secundária – mas terá pouco valor educativo.²⁷²

Materializa-se, desta forma, uma preocupação com a transversalidade dos conceitos matemáticos na formação científica, cultural e social dos alunos. Acerca do papel da Matemática no ensino liceal escrevia José Sebastião e Silva:

²⁶⁹ “Sobre a Correlação entre a Matemática e a Física no Ensino Liceal”, Rómulo de Carvalho, *Gazeta de Matemática*, nº 31, Livraria Sá da Costa, 1947, Fevereiro, p.13.

²⁷⁰ Relatório da professora agregada do quadro do serviço eventual Maria Teodora Baptista Alves, 7º Grupo de Liceu Maria Amália Vaz de Carvalho, Lisboa, Ano Lectivo 1952-53, *Manuscrito*, Ministério da Educação.

²⁷¹ Em particular na forma como se dedica à análise dos resultados e à identificação das dificuldades e inconsequências do ensino da matemática em Portugal. Publicou diversos artigos na *Gazeta de Matemática*, nomeadamente “Resultados de um exame de matemática – 1º Ciclo” (G.M. nº 30), “Algumas Deficiências em Matemática de Alunos dos Liceus” (G.M. nº 32), “Resultados de um Exame de Geometria” (G.M. nº33), “O Conceito de Derivada de uma Função na Escola Secundária” (G.M. nº 43), “O Programa de Matemática da actual Reforma do Ensino Liceal” (G.M. nº48), “O Programa de Matemática da actual Reforma do Ensino Liceal - II” (G.M. nº49), “O Programa de Matemática da actual Reforma do Ensino Liceal - III” (G.M. nº51) e “Ainda o Programa de Matemática do 1º Ciclo” (G.M. nº 52).

²⁷² “Algumas deficiências em matemática de alunos dos liceus”, Bento de Jesus Caraça, *Gazeta de Matemática*, nº32, Livraria Sá da Costa, 1947, Maio, p.14.

Para nós e para muitos, é indiscutível que a Matemática deve desempenhar no ensino liceal um papel essencialmente formativo. Pouco interessa que o aluno fique a conhecer muitos teoremas e os processos de resolução de muitas classes de problemas: o que importa, acima de tudo, é que ele tenha exercido as suas faculdades na demonstração dos teoremas e na resolução dos problemas; é que tenha adquirido o hábito de pensar matematicamente...

Exige-se, evidentemente, um mínimo de informação matemática, a aquisição de uma técnica segura de cálculo elementar...; mas isso pouco deverá ser, comparado com o trabalho de criação dos hábitos de raciocínio, de abstracção, de disciplina mental, que distinguem a formação matemática.²⁷³

Muitos anos mais tarde, toda esta problemática viria a ser debatida, tornando-se clara a necessidade de uma articulação mais profunda entre o currículo de matemática e os das restantes disciplinas:

A ênfase da Matemática escolar não está na aquisição de conhecimentos isolados e no domínio de regras e técnicas, mas sim na utilização da Matemática para resolver problemas, para raciocinar e para comunicar, o que implica a confiança e a motivação pessoal para fazê-lo²⁷⁴

O papel da disciplina de Matemática no currículo do ensino liceal prendia-se inevitavelmente com as finalidades desse mesmo currículo e as opções políticas do Estado e Bento de Jesus Caraça viria, nesse mesmo número da revista²⁷⁵, a defender um ensino liceal para todos e uma formação para a cidadania:

O ensino liceal é dirigido a todos, ... e deve ter por objectivo fornecer os elementos de cultura geral e a capacidade de actuação indispensável a todo o cidadão. Esta me parece que deve ser a sua finalidade – formar cidadãos – e não formar matemáticos, ou físicos, ou geógrafos ou alfaíates.

Esta consuma-se numa maior atenção – legitimada pela transformação da finalidade do ensino da Matemática – com a articulação entre a forma e a substância da aprendizagem matemática:

A escola tem, por isso, de procurar, a respeito de cada aluno, as suas deficiências, as quais podem ser de muito variada natureza, a fim de as corrigir prontamente, evitando a formação de um complexo de inferioridade capaz de produzir graves perturbações.²⁷⁶

²⁷³ “A teoria dos logaritmos no ensino liceal”, José Sebastião e Silva, *Gazeta de Matemática*, nº12, Livraria Sá da Costa, 1942, Outubro.

²⁷⁴ *Curriculum Nacional do Ensino Básico: Competências essenciais*, coord. Paulo Abrantes, Ministério da Educação – Departamento do Ensino Básico, 2001, p. 58.

²⁷⁵ “Resposta às considerações anteriores”, Bento de Jesus Caraça, *Gazeta de Matemática*, nº12, Livraria Sá da Costa, 1942, Outubro.

²⁷⁶ “Algumas deficiências em matemática de alunos dos liceus”, Bento de Jesus Caraça, *Gazeta de Matemática*, nº32, Livraria Sá da Costa, 1947, Maio, p.14.

Assim, a forma deve responder às necessidades dos alunos, traduzindo a substância, isto é, as ideias que a compõem.

Paralelamente, Hugo Ribeiro constitui o autor de maior contributo para este aspecto do debate e inicia a sua participação com duas questões de fundamental pertinência. A partir da sua análise, profunda e cuidada, são identificados diversos motivos para a deficiente formação dos professores de Matemática. Muitos deles remetem-nos para a diferença substancial entre um professor que ensina Matemática e um professor que ensina o aluno a compreender Matemática:

É a Matemática considerada, entre nós, normalmente, como uma ciência em desenvolvimento, sobre a qual há que actuar para a conhecer, e que, embora relacionada com outras actividades, tem problemas próprios exigindo um treino especial e aturado, não delimitado (e muito menos normal e estritamente delimitado) pelas ciências e técnicas que ela serve?

Este treino, estes problemas, são normalmente abordados pelos que hão-de ensiná-los? [...]

Os resultados conhecidos dos exames de aptidão [...], a estrutura da nossa licenciatura em ciências matemáticas, o desenvolvimento da investigação matemática, a mumificação corrente dos nossos cursos, as nossas bibliotecas matemáticas, a história do “Prémio Nacional Doutor Gomes Teixeira”²⁷⁷, etc., etc., respondem negativamente àquelas interrogações.²⁷⁸

Como tal, a reprodução através de uma determinada formação de docentes de um ensino focado nos aspectos formais – para não dizer particulares da linguagem matemática –, em detrimento da reflexão e compreensão das suas ideias e conceitos, leva o sistema de ensino à criação de especialistas ignorantes:

...o homem hoje dominante é um primitivo, [...] emergindo no seio de um mundo civilizado. [...] ...resulta que o homem de ciência actual é o protótipo do homem-massa. E não por acaso, nem por defeito unipessoal de cada homem de ciência, mas porque a própria ciência – raiz da civilização – o transforma automaticamente em homem-massa; quer dizer, faz dele um primitivo, um bárbaro moderno. [...] Para progredir, a ciência necessitava que os homens de ciência se especialisassem. [...] O especialista “sabe” muito bem o seu cantinho pequenino de universo; mas ignora de raiz tudo o resto. [...] Teremos que dizer que é um sábio-ignorante [...] é um senhor que se comportará

²⁷⁷ No artigo “O Prémio Nacional Doutor Francisco Gomes Teixeira”, da *Gazeta de Matemática* nº 15, Aniceto Monteiro traça a história deste prémio e da sua curta existência. Relevante também o curioso episódio do seu primeiro vencedor, Fernando Soares David, ter sido obrigado a realizar outro curso superior, em virtude de lhe serem negadas bolsas que, com o seu trabalho, fizera por merecer, em retaliação pela entrevista que deu a um jornal da época, criticando de forma velada a falta de qualidade do ensino da Matemática em Portugal (“O laureado do Prémio “Dr. Gomes Teixeira” fala das deficiências do ensino da Matemática em Portugal”; *Diário de Lisboa*; 24/12/1945; 2 p.; cópia; Biblioteca Nacional; Sala 2.36, Dossier II, nº36).

²⁷⁸ “Sobre o Treino de Estudo dos Nossos Professores”, Hugo B. Ribeiro, *Gazeta de Matemática*, nº19, Livraria Sá da Costa, 1945, Julho, p.7.

em todas as questões que ignora, não como um ignorante, mas com toda a petulância de quem é um sábio na sua questão especial.²⁷⁹

Tal como Hugo Ribeiro afirma, este problema só pode ser contornado com uma mudança de perspectiva sobre o que deve constituir o ensino da matemática. Se por um lado foi possível axiomatizar a matemática e conceber definições rigorosas de objectos e propriedades matemáticas, por outro lado subjugou-se todos os seus aspectos a essa perspectiva dominante:

Because we have taught ourselves to think strictly according to Occam's Razor²⁸⁰, we also think that that should be the mode of discourse in the calculus classroom. This view is perhaps shortsighted.²⁸¹

Cada vez menos uma aula pode cingir-se a uma pré-dica construída com os mesmos princípios que regem as matérias de que fala, com o risco de se tornar paradoxal²⁸². Essas matérias, se codificadas a partir dos seus próprios fundamentos, não se conseguem tornar evidentes a quem, do exterior, não esteja completamente munido dos decifradores básicos dessa dissimulada encriptação. Antes de se aplicar esses princípios genéticos no ensino, os alunos têm que perceber a sua necessidade e relevância para a compreensão dos conceitos principais da disciplina, algo que não se consegue por osmose.

²⁷⁹ *A Rebelião das Massas*, Ortega Y Gasset, Relógio d'Água, 2007.

²⁸⁰ Princípio que afirma que a explicação para qualquer fenómeno deve supor apenas as premissas estritamente necessárias à sua explicação e eliminar todas as que não causariam qualquer diferença aparente nas predições da hipótese ou teoria.

²⁸¹ *How to Teach Mathematics*, Steven G. Krantz, American Mathematical Society, 1999, p.XI.

²⁸² Ver *A Lição*, Eugène Ionesco, trad. Ernesto Sampaio, Edições Cotovia, 1998.

GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XX

N.º 76-77

SET.-DEZ. 1909

SUMÁRIO

Editorial

A investigação científica em Portugal
por J. Gomes Teixeira

Sur l'enseignement supérieur des mathématiques
en U. R. S. S.
por A. F. Costa

L'insegnamento della matematica nelle università italiane
por Luigi Cremona

Les Ecoles Normales Supérieures
por A. Borel

La formation mathématique de l'ingénieur
por J. Borel

Une particularité de l'enseignement français:
les mathématiques spéciales
por André Adès

L'insegnamento della matematica nelle scuole
secondarie italiane
por Bruno Casellato

Faculdades de Ciências
por A. César de Faria

Olympiade de Mathématiques
*por Institut de Recherche
Académie de Sciences Ukrainiennes*

Faculty of sciences
por José Carlos

Condições do progresso científico nos grandes Laboratórios
por José F. P. Costa

Papel dos Directores do Laboratório
por João Domingos Bernal

Aspectos do problema da organização da pesquisa
científica em Portugal
por Carlos Fernando Torres da Fonseca

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

3.2 Número comemorativo do XX aniversário da *Gazeta de Matemática*, dedicado ao ensino da Matemática.

3.4 Do ensino da Matemática na Alemanha e em Itália na *Gazeta de Matemática*.

Antes da caracterização do quadro dos sistemas de ensino, abordados em artigos da *Gazeta de Matemática*, Luiz Freire²⁸³ publica o artigo “Des Rapports entre le Language et les Mathématiques”, no número 53 da *Gazeta de Matemática*, apresentado no Congresso de Lógica Matemática, realizado em Paris, em 1952, onde se encontra uma explícita influência de Bourbaki²⁸⁴. Aí surge a noção de que existe uma diferença fundamental entre a Matemática e as outras ciências, principalmente na forma como vai sendo urdida. A Matemática constitui-se como um edifício em construção, de processos pré-definidos, que determinam a sua solidez:

Le point de départ de la Mathématique est psychologique, comme est d'ailleurs celui de toute science.

Mais la mathématique ayant fixé son point de départ, tout ce qui dépasse est demandé à la logique; c'est le contraire de ce qui survient dans le langage, d'où les influences psychologiques accompagnent fortement toute la formation du langage.²⁸⁵

Como vimos em capítulos anteriores, esta ideia já foi contestada, nomeadamente pelo papel fundamental das *linguagens icónicas* na construção da matemática²⁸⁶ e pelo *vislumbre* que afecta amiúde os matemáticos²⁸⁷.

No artigo “Sobre o ensino da Matemática na Alemanha”, da *Gazeta de Matemática* número 55, escolhido por José Sebastião e Silva para análise – sendo a natureza prolixa da criação científica alemã algo em destaque na fundamentação dessa escolha –, há um retornar da reflexão sobre a transversalidade dos conceitos matemáticos na formação científica, cultural e social dos alunos, nomeadamente reconhecendo essa preocupação e resultados positivos obtidos pelo sistema de ensino alemão:

...a orientação adoptada [...] é de índole acentuadamente intuitiva, procurando-se dar a génese psicológica dos conceitos e a sua finalidade prática, através de numerosos exemplos, citações históricas e aplicações concretas, constantemente referidas à existência do homem no mundo físico e no agregado social.²⁸⁸

²⁸³ Luiz de Barros Freire (1896-1963). Professor de Física e de Análise Matemática na Universidade Federal de Pernambuco. Membro da Academia de Ciências Brasileira. Engenheiro Civil e doutorado em Ciências Físicas e Matemáticas, fundador do Instituto de Física e de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco.

²⁸⁴ Nota 69.

²⁸⁵ “Des Rapports entre le Language et les Mathématiques”, Luiz Freire, *Gazeta de Matemática*, nº53, Livraria Sá da Costa, 1952, Dezembro, p.9.

²⁸⁶ Ver p. 26-27.

²⁸⁷ Ver p. 41.

²⁸⁸ “Sobre o ensino da Matemática na Alemanha”, José Sebastião e Silva, *Gazeta de Matemática*, nº55, Livraria Sá da Costa, 1953, Agosto, p.10.

Assim, o ensino da Matemática constitui-se como elemento transversal em todos os níveis e tipos de ensino secundário, com o objectivo de os alunos interiorizarem processos cognitivos, muito mais do que estruturas da matemática formal. Contudo, na passagem para o ensino universitário, os processos sofrem uma mutação, visando servir novos objectivos. Estes resultam de um certo grau de especialização e de uma substancial necessidade de novas competências da parte dos alunos:

Um dos objectivos essenciais do ensino universitário é o de conduzir aos modernos problemas e, mais ainda, à moderna forma do pensamento matemático; de maneira que o aluno se verá colocado, não só perante matérias novas, mas ainda – e isso é o mais notável – perante novos processos mentais, de natureza bem mais elaborada. Ao mesmo tempo, a sua atitude para com a ciência deixará de ser a de passivo espectador, para tender progressivamente, à de participante.²⁸⁹

No que concerne ao artigo “Sobre o ensino da Matemática em Itália”, da *Gazeta de Matemática* número 57, José Sebastião e Silva fundamenta a sua escolha, não só na vasta contribuição italiana na construção do edifício matemático, mas também nas afinidades socioculturais que unem os nossos dois povos – também relevante o facto de ter sido bolseiro do Instituto de Alta Cultura junto do Instituto N. di Alta Matemática, que lhe permitiu trabalhar em Roma entre 1943 e 1947. Relativamente ao ensino secundário, destaca as contribuições do geómetra Federigo Enriques²⁹⁰, nomeadamente a noção, que possui e transmite, dos factores fundamentais que determinam a competência de um professor:

Mais do que as diferenças dos métodos ou as indicações dos programas influi sobre a eficácia do ensino o valor dos que ensinam: a sua mentalidade, o calor comunicativo, a paixão que dedicam às coisas ensinadas, a largueza de interesses que os torna capazes de se colocarem no lugar dos alunos e de sentirem como estes. Na medida em que tais dotes possam ser adquiridos, é necessário para tanto cuidar sobretudo da preparação universitária e, depois disso, criar aos professores condições de vida que deixem suficiente liberdade para manter e desenvolver a sua própria cultura.²⁹¹

A análise do ensino secundário padece de um estudo mais aprofundado, mas o próprio José Sebastião e Silva esclarece que pretende focar-se no sistema de ensino universitário italiano. A insuficiente abordagem ao ensino secundário será compensada pelo artigo “L’insegnamento della

²⁸⁹ “Sobre o ensino da Matemática na Alemanha”, José Sebastião e Silva, *Gazeta de Matemática*, nº55, Livraria Sá da Costa, 1953, Agosto, p.10.

²⁹⁰ Federigo Enriques (1871-1946). Matemático, filósofo e historiador da ciência italiano. Doutorou-se em Matemática na Escola Normal Superior de Pisa. Judeu de ascendência portuguesa, trabalhou com Guido Castelnuovo, que casou com a sua irmã, Elbina Enriques. O fruto desse casamento foi Emma Castelnuovo. Deu importantes contributos na área de geometria algébrica. Mais tarde dedicou-se à filosofia, história e didáctica da Matemática. Fundou a Sociedade Italiana de Filosofia.

²⁹¹ “Sobre o ensino da Matemática em Itália”, José Sebastião e Silva, *Gazeta de Matemática*, nº57, Livraria Sá da Costa, 1954, Maio, p.7.

Matematica nelle Scuole Secondarie Italiane” de Emma Castelnuovo, publicado na *Gazeta de Matemática*, correspondente aos números 76 e 77 ²⁹², o qual será objecto de reflexão mais adiante. Assim, José Sebastião e Silva prossegue com a sua análise, abordando com maior extensão o ensino superior, nomeadamente o ensino de futuros professores. Mais uma vez cita Federigo Enriques, a propósito da estrutura do ensino universitário:

...os cursos fundamentais adquiriram no nosso país uma forma particularmente cuidada, dando lugar a tratados que são muitas vezes modelos de acabado rigor. [...] Mesmo a exacta formulação das restrições exigidas no enunciado dos teoremas pode perturbar a visão da génese das ideias, e até a inteligência do seu valor.²⁹³

Esta afirmação reveste-se de importante significado, na medida em que fundamenta a posição de Enriques, relativamente à forma como a ciência deve ser encarada pelo futuro professor. Ao contrário do que pode ser entendido e aplicado, o ensino do professor deve constituir-se, não só com o conhecimento dos seus processos, mas também por uma visão dinâmica da ciência:

E portanto que o estudioso aprenda pela história a reflectir sobre a génese das ideias e que, por outro lado, participe no interesse pela investigação. [...] Importa por isso mostrar a contribuição significativa que as matemáticas superiores prestam em vários sentidos à inteligência dos conceitos e à resolução dos problemas elementares.²⁹⁴

Relativamente à caracterização do ensino secundário italiano, realizada por Emma Castelnuovo, esta conduz a um conjunto de conclusões que suscita uma comparação e reflexão, com e sobre o presente. Em algumas dessas conclusões revêem-se problemáticas relacionadas com o nível de abstracção no ensino da Matemática ou com as suas relações sociais e culturais – que existem – que não são objecto de aprendizagem. Emma Castelnuovo reflecte também as suas preocupações com o estado do ensino em Itália, apelando a uma maior participação da sociedade na escola – e vice-versa –, uma vez que essa constitui a melhor forma de uma ciência evoluir, na investigação e no ensino. Mais do que isso, uma postura aristocrática inviabiliza esse diálogo, importante e necessário, constituindo um entrave à utilização das ciências no concreto e, consequentemente, ao florescimento de mais e outras interrogações, susceptíveis de contribuir para a construção do conhecimento, como se ilustra com uma sua citação do matemático Guido Castelnuovo²⁹⁵:

²⁹² “L’insegnamento della Matematica nelle Scuole Secondarie Italiane”, Emma Castelnuovo, *Gazeta de Matemática*, nº76 e 77, Livraria Sá da Costa, 1959, Setembro e Dezembro.

²⁹³ “Sobre o ensino da Matemática em Itália”, José Sebastião e Silva, *Gazeta de Matemática*, nº57, Livraria Sá da Costa, 1954, Maio, p.9.

²⁹⁴ “Sobre o ensino da Matemática em Itália”, José Sebastião e Silva, *Gazeta de Matemática*, nº57, Livraria Sá da Costa, 1954, Maio, p.10.

²⁹⁵ Guido Castelnuovo (1865-1952). Importante matemático italiano, conhecido pelos seus contributos no campo da Geometria Algébrica e da Estatística e Probabilidade. Foi professor na Universidade de Roma e na Universidade de Turim e fundador da Faculdade de Ciências Actuarias e Estatísticas da Universidade de Roma.

Selle attitudini del giovane lo portano verso le questione concreti, egli si ribellerà contro l'eccessivo spirito astratto dei nostri corsi, e non comprenderà l'interesse di una teoria finché non ne avrà vista qualche pratica conseguenza. Ora è questo il torto precipuo dello spirito dottrinario che invade la nostra scuola. Noi vi insegniamo a diffidare dell'approssimazione, che è realtà, per adorare l'idolo di una perfezione che è illusoria.

Constitui predisposição de qualquer jovem lidar com situações concretas, ele revoltar-se-á contra o excessivo espírito abstracto dos nossos cursos e não compreenderá o interesse de uma teoria para a qual não vislumbrará qualquer consequência prática. Ora é este o princípio errado do espírito doutrinar que invade a nossa escola. Ensinamo-los a duvidar da aproximação, constitutiva da realidade, para adorar uma perfeição que é ilusória.²⁹⁶

Como se vê, existe uma certa dose de esquizofrenia na matemática, na medida em que se tenta reduzir a um jogo, teórico e definido, um conjunto de conceitos cuja assimilação resulta da vivência de fenómenos físicos, estéticos e emocionais pelos seres humanos, fenómenos esses que são múltiplos e diversamente reunidos, causando um efeito individual e temporalmente único.

3.5 Dos reflexos históricos na contemporaneidade.

Observando a conclusão final do estudo *A Divergência entre a Avaliação Contínua e os Exames Nacionais de Matemática 1993-1994*, poderemos reflectir um pouco sobre algumas questões que são aí colocadas e sugeridas, estabelecendo alguns elos entre os dois diferentes momentos históricos aqui tratados, que possuem contextos diversos, mas nos quais o tempo não condiciona a natureza interrogativa dos homens:

Como conclusão final surge o claro afastamento entre o currículo prescrito e o currículo adquirido pelos alunos ao nível nacional.²⁹⁷

Neste estudo, são elencadas diversas hipóteses de futuras investigações, centradas em quatro aspectos distintos, no sentido de obviar o problema fundamental identificado:

Foi Presidente da Academia dos Linceus até à sua morte e foi eleito membro da Academia de Ciências de Paris. Filho do romancista e escritor Enrico Castelnuovo. Sebastião e Silva dedicou-lhe um artigo, na *Gazeta de Matemática* nº 52 de 1952:

“Homem acolhedor, modesto, de olhar tranquilo e arguto, levemente irónico, recebia todos, grandes e pequenos, com a mesma afabilidade, o mesmo desejo de ser útil, a mesma decidida vontade de socorrer e de encorajar.

Sobretudo a serenidade – a calma contemplação dos homens e dos factos, como se os visse dum outro mundo em que tudo é claro e objectivo – era a nota que mais se fazia sentir a quem dele se abeirava pela primeira vez. [...] É com homens desta envergadura que se mantém, perene e criadora, a tradição científica na pátria de Galileu.” in “Guido Castelnuovo”, José Sebastião e Silva, *Gazeta de Matemática*, nº 52, 1952, p.3.

²⁹⁶ “La scuola nei suoi rapporti colla vita e colla scienza moderna”; Acta do III Congresso da *Mathesis*, 1912.

²⁹⁷ *A divergência entre a avaliação contínua e os exames nacionais de Matemática - 1993-1994*, Joana Castro, Jorge Maia, Instituto de Inovação Educacional, 1996.

- o das concepções de avaliação que dão forma às práticas na sala de aula;
- o da relação entre o tipo de ensino-aprendizagem efectuado e a avaliação do mesmo;
- o da relação entre o desempenho possível dos alunos e as exigências das avaliações externas;
- o do currículo prescrito e os conflitos de interpretação, que se manifestam na sua transmissão, avaliação e aquisição.

Um quinto campo pode e deve ser objecto de estudo, sem que se ponha em causa a necessidade de um programa de aprendizagem e da interacção entre aluno e professor, bem como a utilização de metodologias e a sua avaliação: a forma e substância do currículo prescrito. Daqui deriva o maior dos nossos problemas, a Matemática continuar a ser vista por muitos como uma actividade independente e isolada das outras actividades humanas e os estudos pecam sempre por uma observação formal da matemática – como quem faz poesia sem fugir de uma determinada métrica; nem todos o conseguirão. Por um lado, continuamos influenciados pela *Matemática Moderna* de Bourbaki, forjada por um grupo de matemáticos, que procurava uma unicidade formal de todo o conhecimento matemático, passado e futuro:

Desde os primórdios, todas as revisões críticas dos princípios da Matemática como um todo, ou de qualquer um dos seus ramos, seguiram-se, quase invariavelmente, a períodos de incerteza, onde as contradições surgiam e tinham que ser resolvidas. [...] Existem agora vinte e cinco séculos durante os quais os matemáticos têm sistematicamente corrigido os seus erros, tendo visto a sua ciência enriquecida e não empobrecida; isto dá-lhes o direito de olhar para o futuro com serenidade.”²⁹⁸

Esta linha de pensamento, fomentando uma construção que deu frutos na qualidade do formalismo matemático, viria a ser mais tarde confrontada com as suas próprias insuficiências, nomeadamente através do Teorema da Incompletude de Gödel. Ironicamente os seus encontros eram muito pouco formais:

...alguns estrangeiros convidados [...] dos encontros de Bourbaki, saíam sempre com a impressão que era um encontro de loucos. Não podiam imaginar como é que aquelas pessoas, gritando – às vezes três ou quatro ao mesmo tempo – poderiam alguma vez produzir algo inteligente...”²⁹⁹

A este propósito, constitui um exemplo marcante do nível de actualidade pedagógica, à época, presente na *Gazeta de Matemática*, o artigo de Emma Castelnuovo, “Matemática clássica ou matemática moderna, no ensino secundário?”³⁰⁰, onde explana as opiniões de autores como Jean

²⁹⁸ *Mathematics – The loss of Certainty*, Morris Klein, Oxford University Press, 1980, p. 6.

²⁹⁹ <<http://www.ega-math.narod.ru/Bbaki/Bourb3.htm>>, em 8 de Abril de 2014.

³⁰⁰ “Matemática clássica ou matemática moderna, no ensino secundário?”, Emma Castelnuovo, *Gazeta de Matemática*, nº 65, Livraria Sá da Costa, 1956, Dezembro.

Piaget³⁰¹, Jean Diodonné³⁰², Ewart Beth³⁰³, André Lichnerowicz³⁰⁴, Gustave Choquet³⁰⁵ e Caleb Gattegno³⁰⁶, editadas pela *Commission Internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des Mathématiques*. Todos os autores abordam a questão do ensino da matemática com grande influência bourbakiana, explanando ideias pedagógicas muito assentes nas estruturas internas da matemática, considerando uma aprendizagem baseada no sistema axiomático, no qual a evolução do aluno se faz no contexto da linguagem formal. Apenas Caleb Gattegno mostra possuir ideias vanguardistas sobre o tema.

Pretende o autor servir-se, precisamente, das estruturas mentais já existentes na mente da criança e conceber um programa que, baseando-se nestas, tenha especialmente em conta as dificuldades que encontra o aluno, ao passar de uma estrutura a outra. [...]...não é o particular mas o geral que interessa a criança; é a acção do programa e a do professor que constroem a sua inteligência a confinar-se dentro de certos limites e é por esta razão que, muitas vezes, o ensino da matemática resulta difícil e pouco atraente. [...] Cada um de nós é levado pela leitura deste artigo [...] a uma reconsideração do programa e da nossa maneira de ensinar...³⁰⁷

³⁰¹ Sir Jean William Fritz Piaget (1896-1980). Epistemólogo suíço, considerado o maior expoente do estudo do desenvolvimento cognitivo. Estudou inicialmente Biologia, na Suíça, e posteriormente dedicou-se à área de Psicologia, Epistemologia e Educação. Professor de psicologia na Universidade de Genebra. Escreveu mais de cinquenta livros e diversas centenas de artigos.

³⁰² Jean Alexandre Eugène Dieudonné (1906-1992). Matemático francês, conhecido pela sua pesquisa em álgebra abstracta e análise funcional e pelo seu envolvimento no grupo do pseudónimo Nicolas Bourbaki. Foi historiador da Matemática, em particular nas áreas de análise funcional e topologia.

³⁰³ Evert Willem Beth (1908-1964). Lógico, matemático e filósofo holandês, cujos trabalhos versavam maioritariamente sobre os fundamentos da Matemática. Beth foi um dos fundadores da *Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*. Foi professor na Universidade de Amsterdão.

³⁰⁴ André Lichnerowicz (1915-1998). Matemático francês, especialista em geometria diferencial e física matemática. Professor na Universidade de Estrasburgo, na Universidade de Paris e no Colégio de França. Membro da Academia de Ciências de Paris.

³⁰⁵ Gustave Choquet (1915-2006). Matemático francês, com contribuições em análise funcional, teoria potencial, topologia e teoria da medida. Professor na Universidade de Paris e na École Polytechnique. Membro da Academia de Ciências de Paris e Oficial da Legião de Honra. Casado com Yvonne Choquet-Bruhat (n. 1923) matemática e física francesa, tendo sido a primeira mulher eleita membro efectivo da *Académie des Sciences Française*, em 1979.

³⁰⁶ Caleb Gattegno (1911-1988). Cientista, matemático, inventor e pedagogo egípcio, conhecido pelo seu contributo inovador para o ensino e aprendizagem da Matemática, das línguas estrangeiras, e da leitura. Bacharel em Química e Física, pela Universidade de Marselha (1931), doutorado em Matemática, pela Universidade de Basileia (1937), mestre em Artes na Educação, na Universidade de Londres (1948) e doutorado em Filosofia (Psicologia), pela Universidade de Lille (1951). Professor em várias universidades, entre as quais a Universidade de Liverpool e a Universidade de Londres, e fundador de diversas organizações, entre elas a génese da Associação Americana de Professores. Publicou mais de 120 livros e 500 artigos científicos, em vários países. Quando faleceu, falava e escrevia em 40 línguas diferentes.

³⁰⁷ “Matemática clássica ou matemática moderna, no ensino secundário?”, Emma Castelnuovo, *Gazeta de Matemática*, nº 65, Livraria Sá da Costa, 1956, Dezembro, pp. 9-10.

Do ponto de vista de Gattegno, o ensino não deve ser dedutivo, numa via previamente traçada, mas tomando consciência de determinadas propriedades matemáticas a partir de situações vivenciadas pelo próprio aluno, não necessariamente fechadas nos conteúdos da disciplina de matemática. Porque se afirmaram vanguardistas estas ideias? Porque vêm sugerir que os currículos escolares são excessivamente hierarquizados e compartimentados (ou a interpretação e aplicação que deles se faz).

Para além disso, Kieran Egan³⁰⁸ abordou muito mais tarde um ponto de vista semelhante de observar a problemática da aprendizagem cognitiva, apontando diferentes formas de construção narrativa como mais adequadas para diferentes momentos do desenvolvimento intelectual, como se verá noutro capítulo.

Surgiu também investigação – a propósito da comunicação e redefinição das áreas do conhecimento –, patente nas obras, por exemplo, de Peter Galison³⁰⁹, que suscita sérias reservas se a organização curricular reflecte e serve o paradigma científico e até social em que nos encontramos no presente. Facilmente se percebe que cada vez mais o trabalho é colaborativo e exige uma capacidade de tradução de ideias matemáticas para outros contextos, bem como uma identificação eficaz dos mecanismos matemáticos subjacentes a determinados processos físicos, químicos, biológicos, económicos, neurológicos, computacionais, etc, etc..

A razão de base é que a ciência e a matemática tornaram-se cada vez mais interdisciplinares. [...]...há uma outra razão que explica...[...] Trabalhar em grupos, com colegas, é bem mais divertido do que ficares sentada no teu gabinete.[...] Mais interessante ainda, quando duas pessoas juntam as cabeças, conseguem por vezes arranjar ideias que nenhuma delas teria individualmente.³¹⁰

Se a formação dos professores se adequa a esse paradigma constitui uma das questões pertinentes neste contexto. Algumas sugestões – para a melhoria da prática pedagógica – já tinham sido avançadas por Hugo Ribeiro:

...a normal, oficial, insuficiência no treino de estudo dos nossos professores de Matemática; [...] Pergunta-se se esta situação não assenta no florescimento, entre nós, dum erro de princípio sobre a ideia do que sejam os estudos matemáticos – uma ideia degenerada num horizonte limitado [...] pelos objectivos das aplicações a certas técnicas. A frequência de seminários dos mais diversos

³⁰⁸ Kieran Egan (n. 1942). Filósofo educacional contemporâneo e estudioso dos *Clássicos*, de antropologia, psicologia cognitiva e história cultural. Abordou questões relacionadas com a educação desenvolvimento da criança, com ênfase nos usos da imaginação e nas etapas de desenvolvimento do intelecto (às quais Egan chama *fases de compreensão*) que ocorrem durante o desenvolvimento intelectual do indivíduo.

³⁰⁹ Nota 164.

³¹⁰ *Cartas a uma Jovem Matemática*, Ian Stewart, Relógio D'Água, 2006, pp.146-149.

níveis, junta a uma preparação complementar para os actuais professores constituiria o remédio [...].³¹¹

Esta postura de inércia perante as constantes mutações do conhecimento científico parece condicionar os nossos resultados escolares, na medida em que a prática pedagógica, apesar de todos os instrumentos tecnológicos e outros, mantém um distanciamento em relação à dinâmica que esse conhecimento imprime na matriz social e cultural contemporânea.

³¹¹ “Sobre o treino de estudo dos nossos professores”, Hugo B. Ribeiro, *Gazeta de Matemática*, nº25, Livraria Sá da Costa, 1945, Julho, p.11.

4- Literacia e Oralidade na Matemática.

4.1 Literacia e Oralidade na Pedagogia da Matemática.

4.1.1 Notas histórico-filosóficas sobre a oralidade.

Muitos pedagogos têm defendido novas formas de abordar o conhecimento matemático, nomeadamente Michael Schiro³¹², baseado na transmissão oral, base primeira da construção cultural das civilizações humanas:

Os primeiros narradores de contos orais foram historiadores, artistas, arautos, professores de religião e de moral, e educadores. Em geral, eram estas figuras que permitiam e protagonizavam a transmissão das formas culturais vigentes. Os professores, os religiosos, os padres, os pais, assim como os narradores, nómadas ou sedentários, todos eles se serviam do conto oral para salvaguardar e transmitir, de geração em geração, as suas tradições.³¹³

Michael Schiro evidencia que, em certa medida, seriam estes indivíduos os detentores do papel fundamental de preservar uma identidade cultural, estabelecendo uma unidade social. Italo Calvino – estudioso e ensaísta do conto popular³¹⁴ – destaca a criatividade linguística desses primeiros contadores de histórias como o elemento precursor da sua actividade:

The storyteller began to put forth words, not because he thought others might reply with other, predictable words, but to test the extent to which words could fit with one another, could give birth to one another, in order to extract an explanation of the world from the thread of every possible spoken narrative.³¹⁵

Assim, o conhecimento era legado e acrescentado com as experiências das sucessivas novas gerações. O importante estatuto social levou à criação de uma « profissionalização » e as pequenas histórias deram lugar às narrativas que simbolizavam os valores inerentes a uma determinada comunidade ou civilização.

Os narradores profissionais de contos orais podiam ser encontrados por todo o mundo: em África, na Europa, na América ou na Ásia. Alguns dos mais conhecidos contos orais da cultura ocidental,

³¹² Michael Stephen Schiro, professor na Universidade de Boston. Especializou-se em educação matemática, tendo leccionado pedagogia da matemática, teoria curricular, educação computacional, literacia e educação multicultural desde 1974. Realizou o seu doutoramento em Harvard. Autor de diversas obras pedagógicas relevantes, nomeadamente *Integrating Children's Literature and Mathematics in the Classroom: Children as Meaning Makers, Problem Solvers and Literary Critics, Mega-Fun Math Games, Curriculum for Better Schools: The Great Ideological Debate, Tan and the Shape Changer* e *Oral Storytelling and Teaching Mathematics – Pedagogical and Multicultural Perspectives*.

³¹³ *Oral Storytelling and Teaching Mathematics – Pedagogical and Multicultural Perspectives*, Michael Stephen Schiro, Sage Publications, 2004, p. VII.

³¹⁴ *Fábulas e Contos*, Italo Calvino, 3 volumes, Gradiva, 2000; *Sobre o Conto de Fadas*, Italo Calvino, Gradiva, 1999.

³¹⁵ *The Uses of Literature*, Italo Calvino, Harcourt Brace and Company, 1986, p. 4.

posteriormente gravados em caracteres escritos, são *Gilgamesh* (do Médio Oriente), a *Iliada* e a *Odisseia* (da Europa), ou *Ramayana* (da Índia).³¹⁶

Com essa «profissionalização», aperfeiçoaram-se os métodos de contar³¹⁷, acrescentaram-se adereços e modificaram-se os espaços e os contextos em que ocorriam essas narrações.

Os bardos das Ilhas Britânicas cantavam as suas histórias ou colocavam-nas na forma de poesia, tal como os da Rússia, da Ásia, da América do Norte ou os de África. Os narradores religiosos da Índia, da China e do Médio Oriente usavam muitas vezes materiais manipuláveis e imagens para os auxiliar no seu trabalho. Os narradores teatrais da China, do Japão, da Rússia e da América do Norte actuavam muitas vezes com a participação da audiência³¹⁸.

Schiro refere ainda que a Matemática era também transmitida por enigmas, problemas e histórias, sempre intimamente relacionadas com o quotidiano, metamorfoseando-se consoante o contexto social e temporal. No entanto, a natureza da axiomática moderna, profundamente abstracta mas facilitadora da construção e conexão entre os diversos conceitos – presente nas teorias matemáticas – tem, progressivamente, bloqueado novas e diferentes expressões dos mais recentes desenvolvimentos desta disciplina. Curiosamente, em fases anteriores da sua evolução, essas axiomáticas podiam possuir uma qualquer expressão concreta (axiomáticas associadas à geometria euclidiana, por exemplo). Esta materialização de conceitos criava um laço indelével com o mundo físico e com a vivência dos seres humanos, facilitando a criação de narrativas, orais e gráficas, para a transmissão desses conhecimentos.

..the operations of narrative, like those of mathematics, cannot differ that much from one people to another, but what can be constructed on the basis of these elementary processes can present unlimited combinations, permutations and transformations.³¹⁹

Nesse aspecto, o seu ensino ou a sua reprodução não eram muito diferentes das de outros campos epistemológicos.

Consequentemente, enquanto numa sociedade fracamente literata o conhecimento é fragmentado e eminentemente vocacionado para uma vertente prática, numa sociedade altamente literata o mesmo não se aplica, em virtude de uma definição mais rigorosa dos saberes e de uma nomenclatura mais prolífera e determinante. Nessa medida, os conceitos transmitidos oralmente são

³¹⁶ *Oral Storytelling and Teaching Mathematics – Pedagogical and Multicultural Perspectives*, Michael Stephen Schiro, Sage Publications, 2004, p. VII.

³¹⁷ Vladimir Propp viria a identificar, a partir da análise de contos populares russos, as estruturas que permitem, no conto oral, uma multiplicidade de combinações, a partir de um conjunto limitado de funções narrativas. Mais tarde Claude Lévi-Strauss, com base no seu trabalho sobre mitos dos índios do Brasil, concluiu que essas funções narrativas formavam um sistema de operações lógicas, podendo ser estudados recorrendo à análise combinatória.

³¹⁸ *Oral Storytelling and Teaching Mathematics – Pedagogical and Multicultural Perspectives*, Michael Stephen Schiro, Sage Publications, 2004, p. VII.

³¹⁹ *The Uses of Literature*, Italo Calvino, Harcourt Brace and Company, p. 6

mais particulares e pontuais, mas mais susceptíveis de serem assimilados como uma experiência própria pelo ouvinte. Estas formas individuais de absorver o conhecimento foram, antes de surgir uma comunidade literata, o melhor instrumento pedagógico e cultural de perpetuar e difundir o conhecimento acumulado ao longo da história, nomeadamente o matemático.

Mesmo a inicial adopção do diálogo como estrutura de construção de uma narrativa escrita mostra bem a importância de guardar as formas orais como veículo eficaz de conservação e divulgação do conhecimento. A utilização da oralidade por parte desses autores permite hoje reconhecer, como membros de uma sociedade literata, as virtudes de uma tradução escrita da oralidade e, mais do que isso, da aplicação oral de uma construção escrita, tendo em vista a transmissão de um dado conhecimento.

Desde o início do século XX, iniciou-se um processo de reutilização do conto oral para fins pedagógicos:

Quando Friedrich Froebel fundou o movimento *Kindergarten*, em 1837, ele introduziu o conto oral como um componente crítico para a transmissão da cultura para os jovens. O primeiro livro sobre os usos do conto oral na instrução foi publicado em 1905, nos Estados Unidos. Gradualmente o poder do conto oral foi redescoberto.³²⁰

A menorização da oralidade, para alguns autores, representa uma redução da identidade humana. Se por um lado oralizamos um texto quando o lemos, por outro não existem culturas orais que não queiram atingir uma literacia o mais depressa possível. E se a literacia foi a primeira tecnologia³²¹ e, conseqüentemente, o primeiro grande vector evolutivo do ser humano, hoje multiplicam-se as possíveis codificações e processos de conservação e divulgação do conhecimento, nomeadamente o matemático. Neste meio de quase infinitas possibilidades, o formalismo matemático clássico não pode continuar a ser visto como a única expressão válida para a epistemologia do conhecimento matemático. Este não se restringe a um campo de relações simbólicas. E deve ser apresentado como uma forma de compreender – muito mais do que uma forma escrita de codificar ou expressar – a realidade. Assim, ao contrário do modelo mediático, que apresenta uma visão simplista do acto comunicacional – na medida em que considera que a aprendizagem se realiza quase por inércia da mensagem –, na comunicação humana, verbal ou outra, o emissor tem que conseguir colocar-se na posição de receptor, tentando conjecturar que características este pode ter e que respostas antecipar. Assim, a comunicação começa muito antes do acto em si, pois existe toda uma contextualização que é feita com base na experiência e conhecimento anterior do emissor, relativamente aos vários parâmetros, relevantes para a comunicação, que definem o receptor. Apesar do texto aparentar ser um veículo de informação unidireccional, uma vez que não existe um receptor

³²⁰ *Oral Storytelling and Teaching Mathematics – Pedagogical and Multicultural Perspectives*, Michael Stephen Schiro, Sage Publications, 2004, p. VII.

³²¹ *Orality and Literacy: The Technologizing of the World*, Walter Ong, New Accents, 1982, pp. 80-82.

no momento em que é elaborado, o autor ficciona sempre uma audiência e cria, recorrendo a pontes culturais que lhe pareçam apelativas, um contexto propício à aprendizagem, à comunicação com o leitor. Mas existe uma questão que é fulcral:

Não é fácil entrar na mente de indivíduos ausentes, muitos dos quais nunca conheceremos. Mas não é impossível se houver uma familiarização com a mesma tradição literária.³²²

Em Matemática, a multiplicidade do conjunto de leitores suscita contaminação interdisciplinar. Isso implica diversificar os textos, tornando mais acessíveis as ideias.

If someone asks us What is X?, where X is some mathematical concept, we boldly answer, for we have been well trained in the art of definition. [...] If, however, someone asks us What does X mean?, we respond as any human must respond when explaining the meaning of something: we are thrust into the whirlwind of interpretations, intentions, aims, expectations, desires, and shades of significance that, in effect, depend largely on the story we have woven around the concept.³²³

Esta problemática pode ser vista, contemporaneamente, à luz da obra de Malba Tahan, pseudónimo de Júlio César de Mello e Souza³²⁴, pedagogo da Matemática e escritor brasileiro. Crítico feroz das estruturas ultrapassadas de ensino, afirmava que “o professor de Matemática em geral é um sádico. Ele sente prazer em complicar tudo”. Há mais de cinquenta anos, na sua obra *Didáctica da Matemática*, já recomendava o jogo como situação de aprendizagem³²⁵; a montagem do Laboratório

³²² *Orality and Literacy: The Technologizing of the World*, Walter Ong, New Accents, 1982, pp. 173-174.

³²³ “Visions, Dreams, and Mathematics”, Barry Mazur, *Circles Disturbed*, ed. Apostolos Doxiadis e Barry Mazur, Princeton University Press, 2012, p. 183.

³²⁴ Júlio César de Mello e Souza (1895-1974), escritor e matemático brasileiro. Através da sua obra foi um dos maiores divulgadores da Matemática no Brasil. *Contos de Malba Tahan* (1925), *O Homem que Calculava* (1938), *A Sombra do Arco-Íris* (1941) e *Aventuras do Rei Baribê* (1954), constituem alguns exemplos de romances que utilizam o exotismo da cultura oriental como acessório estético para transmitir o conhecimento matemático. Escreveu, ao longo da sua vida, mais de cem obras sobre matemática recreativa (*Matemática Divertida e...* (1934-1946), *Histórias e Fantasias da Matemática* (1939), *Dicionário Curioso e Recreativo da Matemática* (1940), etc.), didáctica da matemática (*Didáctica da Matemática* (1957), *Técnicas e Procedimentos Didácticos no Ensino da Matemática* (1957), *O Problema das Definições em Matemática* (1965), etc.), história da matemática (*Histórias e Fantasias da Matemática* (1939), *A Matemática na Lenda e na História* (1974), etc.) e ficção infanto-juvenil (*Amigos Maravilhosos* (1935), *Paca, Tatu* (1939), *Caixa do Futuro* (1957)), tendo publicado com o seu verdadeiro nome ou com o pseudónimo de Malba Tahan.

³²⁵ Os jogos, como outras actividades de desenvolvimento cognitivo, emocional e social, devem observar e atender a determinadas questões, relativamente aos participantes das mesmas, tal como destaca Lev Vygotsky – pioneiro no conceito de que o desenvolvimento intelectual das crianças ocorre em função das interacções sociais e condições de vida:

Without a consideration of the child's needs, inclinations, incentives, and motives to act – as research has demonstrated – there will never be any advance from one stage to the next. [...] It seems that every advance from one age period to another is connected with an abrupt change in motives and incentives to act. [...] This maturing of new needs and new motives for action is, of course, the dominant factor, especially as it is impossible to ignore the fact that a child satisfies certain needs and incentives in play. [...]...the essential attribute of play is a rule that has become an affect. “An idea that has become an affect, a concept that has turned into a passion” – this ideal of Spinoza's finds its prototype in play, which is the realm of spontaneity and freedom. To carry out the rule is a source of pleasure. The rule wins because it is the strongest impulse. [...] Hence it follows that such a rule is an internal rule, i.e., a rule of inner self-restraint and self-determination,

de Ensino da Matemática, fornecendo mais de setenta sugestões de materiais didáticos; a utilização de paradoxos, falácias e recreações na sala de aula, com apresentação de problemas interessantes; a narração de histórias e a integração da língua materna com a linguagem matemática. Elaborou ainda recomendações, em 1958, propondo, no Ensino Básico, que se introduzissem noções de probabilidade, topologia e estatística, além do uso da máquina de calcular.

Em *O Homem Que Sabia Contar*, um humilde pastor persa, com poderes de cálculo extraordinários, viaja para Bagdad. Durante a sua demanda, surgem problemas e enigmas matemáticos, sempre resolvidos com elegância e simplicidade pela personagem principal.

...recebemos como herança 35 camelos. [...] Encarrego-me de fazer, com justiça, essa divisão, se permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança este belo animal que, em boa hora, aqui nos trouxe! [...] Deverias receber metade de 35, isto é, 17,5. Receberás a metade de 36 e, portanto, 18. [...] ...deverias receber um terço de 35, isto é, 11 e pouco. Vais receber um terço de 36, isto é, 12. [...] ...deverias receber a nona parte de 35, isto é, 3 e tanto. Vais receber uma nona parte de 36, isto é, 4. [...] ...todos os três saíram lucrando [...] ...o que dá um resultado $(18+12+4)$ de trinta e quatro camelos. Um pertence, como sabem, ao meu amigo e companheiro, outro toca por direito a mim...³²⁶

Para além das aventuras do pastor, reflectindo o clima filosófico, religioso e social da época, as resoluções dos problemas – apresentados ao longo dos capítulos – encontram-se no final da obra.

Apesar das preocupações com a questão da oralidade no ensino em alguns autores, nomeadamente Júlio César de Mello e Souza no Brasil, a reintrodução da mesma como componente fundamental na aprendizagem da Matemática só foi realizada, numa escala nacional ou internacional, no final do século passado, com as dúvidas pedagógicas suscitadas pelo aparecimento de novas formas de comunicação e de expressão.

O conto oral matemático dá um salto gigantesco ao abandonar a palavra escrita e a imagem impressa, para um mundo oral. Ao fazê-lo, altera muitas das suposições fundamentais da nossa cultura altamente literata sobre a natureza da matemática escolar e sobre os papéis dos professores e dos estudantes durante a instrução matemática.³²⁷

as Piaget says, and not a rule the child obeys as a physical law. In short, play gives the child a new form of desires, i.e., teaches him to desire by relating his desires to a fictitious “I” – to his role in the game and its rules. Therefore, a child’s greatest achievements are possible in play – achievements that tomorrow will become his average level of real action and his morality.

in “Play and its Role in the Mental Development of the Child”, Lev Vygotsky, <<https://www.marxists.org/archive/vygotsky/works/1933/play.htm>>, em 4 de Julho de 2014.

³²⁶ *O Homem que Sabia Contar*, Malba Tahan, v. port. Maria das Mercês Peixoto, Editorial Presença, 2001, pp. 15 e 16.

³²⁷ *Oral Storytelling and Teaching Mathematics – Pedagogical and Multicultural Perspectives*, Michael Stephen Schiro, Sage Publications, 2004, p. VIII.

Neste contexto, torna-se necessário repensar o acto pedagógico, uma vez que este assume novos contornos:

O conto oral transforma a matemática abstracta, objectiva e dedutiva que todos experimentaram na escola num conhecimento rodeado por imaginação, mito, significados e sentimentos subjectivos. Permite aos professores uma personalização da matemática, estimulando a sua capacidade criativa. E permite aos alunos colocarem em jogo a sua imaginação, tornando a matemática significativa para si próprios.³²⁸

Há mais de cinquenta anos, Paulo Freire propôs que a educação constitui um diálogo. Mas a sua noção de diálogo implica necessariamente a disponibilidade para escutar para além do óbvio e para responder com intencionalidade – no fundo ter a perícia do contador de histórias que molda o seu contar, maximizando a atenção e interesse do ouvinte, tenha ele papel passivo ou activo. A investigação pedagógica tem abordado as diferentes formas dos alunos aprenderem com os seus professores sendo, porém, apenas um aspecto do problema. No entanto, a aprendizagem pedagógica dos professores quando ensinam já vai sendo alvo de pesquisa, a qual não aprofundaremos nesta tese³²⁹.

O estudo da comunicação entre professor e aluno permitiu a identificação de alguns *mitos* – entendidos como ideias feitas ou preconceitos – enraizados na sociedade e a consequente redescoberta da importância essencial da oralidade, na correcta definição e compreensão da Matemática nos processos de aprendizagem da disciplina:

Mito1 : A Matemática contém verdades universais e um sistema de cognição livre de qualquer parametrização cultural.

Não são raros os matemáticos que apontam a subjectividade na escolha desta ou daquela formulação ou a inspiração do matemático como focos determinantes para a fecundidade, mas também para a definição da disciplina num determinado tempo e espaço (capítulo 1.2 e 2.1). Assim:

Unfortunately, there is not a single universal mathematical set of undeniable truths that are valid for all cultures, all times and all situations. [...] The mathematical truths do not exist free from any cultural, religious, political, economic and technological constraints.³³⁰

³²⁸ *Oral Storytelling and Teaching Mathematics – Pedagogical and Multicultural Perspectives*, Michael Stephen Schiro, Sage Publications, 2004, p. VIII.

³²⁹ Esta tese debate as problemáticas relativas à transmissão de ideias ou conceitos matemáticos, não se enquadrando na análise da prática pedagógica e suas consequências. No entanto, há alguns estudos interessantes sobre o assunto como, por exemplo, *Learning Through Teaching Mathematics – Development of Teacher's Knowledge and Expertise in Practice*, Roza Leikin e Rina Zazkis, Springer, 2010.

³³⁰ *Oral Storytelling and Teaching Mathematics – Pedagogical and Multicultural Perspectives*, Michael Stephen Schiro, Sage Publications, 2004, p. 196. Também podemos observar esta questão colocada de uma forma mais genérica por Jean-François Lyotard:

Um facto mais problemático constitui a diferença que existe entre a percepção e utilização da matemática na vida de todos os dias e a percepção e utilização da matemática escolar por parte das pessoas. Existe, amiúde, uma diferença abissal entre o conhecimento que o cidadão comum possui destas duas vertentes do conhecimento matemático, que nos exige um questionamento das premissas subjacentes ao sistema de ensino e, em particular, à transmissão do conhecimento matemático:

In mathematics, we start with assumptions about mathematics, and slight variations in assumptions can create very different mathematical systems. Unfortunately, or fortunately, slight variations in cultural assumptions about mathematics can create large variations in the mathematical knowledge bases of different cultures (and the knowledge base of children who grow up within them).³³¹

Deste modo, as dificuldades encontradas pelos alunos na matemática escolar podem resultar da adopção de pressupostos culturais redutores, que se perpetuam e que induzem uma abordagem distante da verdadeira natureza e utilidade da matemática, assente em equívocos, tais como os que aqui esmiuçamos.

Mito2 : A Matemática contemporânea é uma criação dos povos europeus e norte-americanos.³³²

Este *mito* concretiza-se com afirmações abusivas, tais como: que a evolução da matemática resultou de uma sublimação de sistemas de contagem simples de povos primitivos, para culturas ocidentais, criadoras de um conjunto de sistemas matemáticos sofisticados; de culturas que utilizavam formas concretas de pensamento matemático, para outras que usavam o pensamento abstracto; de culturas matemáticas pré-lógicas para culturas matemáticas lógicas. Podem ser fornecidos exemplos de conceitos e instrumentos matemáticos que foram conhecidos ou demonstrados na China muito antes de serem conhecidos no Ocidente:

No século V, já usavam 355/113 para π , valor esse que, na Europa, foi atribuído a Mélius, um matemático do século XVI. Pelo século VII, calculavam o volume de uma esfera utilizando o princípio hoje conhecido como “Método de Cavalieri”, nome de um matemático italiano do século XVII. Yang Hui, no 13º século da era cristã, justificou a fórmula que determina a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais por reunião de volumes, o que no ocidente será feito apenas no fim do século XIX.³³³

...o saber não é a ciência, sobretudo na sua forma contemporânea; e esta, bem longe de poder ocultar o problema da sua legitimidade, não pode deixar de o pôr em toda a sua amplitude, que não é menos sociopolítica do que epistemológica.

in *A Condição Pós-Moderna*, Jean-François Lyotard, Gradiva, 2003, p. 46.

³³¹ *Oral Storytelling and Teaching Mathematics – Pedagogical and Multicultural Perspectives*, Michael Stephen Schiro, Sage Publications, 2004, p. 197.

³³² *Oral Storytelling and Teaching Mathematics – Pedagogical and Multicultural Perspectives*, Michael Stephen Schiro, Sage Publications, 2004, p. 195.

³³³ *História da Matemática*, Maria Fernanda Estrada, Carlos Correia de Sá, João Filipe Queiró, Maria do Céu Silva, Maria José Costa, Universidade Aberta, 2000, p. 112.

Também no caso da Índia, podem apresentar-se exemplos que atestam o vanguardismo da sua matemática, relativamente a alguns tópicos:

...é em geral aceite que os algebristas indianos estavam adiantados relativamente a Diofanto na facilidade de manipulação algébrica e que desenvolveram uma álgebra sincopada, onde problemas e soluções eram escritos em estilo quase simbólico. [...] ...é de salientar a audácia que tiveram ao criar um sistema numérico que, com o decorrer dos séculos, foi evoluindo para o nosso actual sistema de numeração posicional decimal.³³⁴

Mesmo os resultados alcançados por alguns matemáticos contemporâneos, que lhes trouxeram fama e reconhecimento, são fruto de um contexto e do contacto com resultados de outros matemáticos, eventualmente tão importantes na história como os seus colegas ou sucessores, mas que foram esquecidos ou diminuídos pela história, resultado de um conjunto de circunstâncias que o determinaram. Mas cada vez mais até esses “heróis” se perdem e a matemática levita acima das cabeças dos alunos, como um deus, escondido no poder dos seus símbolos, enigmas e manifestações tecnológicas.

Mito3 : A matemática escolar contemporânea é consistente com as tradições sociais, políticas, religiosas, linguísticas e conceptuais, subjacentes à cultura mundial, podendo qualquer criança, de igual forma, assimilar e utilizar os conceitos matemáticos transmitidos.³³⁵

Existiram muitos sistemas matemáticos, com diferentes bases culturais, ao longo da história, e ainda existem. Cada um desses sistemas possui um conhecimento de base e um conjunto de valores culturais associado. A prática actual consiste em promover e valorizar, nas escolas, apenas um desses possíveis sistemas matemáticos. Isto não só diferencia a capacidade dos alunos assimilarem os conceitos matemáticos, com base nas suas diferenças culturais, favorecendo os mais próximos de uma tradição europeia, como a matemática que aprendemos na escola pode acorrentar-nos a uma forma única de conceptualizar a matemática, quando existem muitas opções viáveis disponíveis.

Tendo em conta a capacidade reconhecida na oralidade para parametrizar culturalmente um conhecimento, para se reconfigurar de acordo com a tradição de uma comunidade ou lugar e de constituir um instrumento que concretiza a sua acção na identificação entre uma interligação oral – estabelecida entre os conceitos que se pretende transmitir e a memória colectiva da audiência à qual se dirige – e a experiência pessoal de cada indivíduo. Reveste-se de singular relevância em todas as futuras pedagogias, na medida em que se apresenta como a unidade fundamental de ligação entre cada ser humano e as manifestações externas da cultura na qual se insere.

³³⁴ *História da Matemática*, Maria Fernanda Estrada, Carlos Correia de Sá, João Filipe Queiró, Maria do Céu Silva, Maria José Costa, Universidade Aberta, 2000, pp. 397-398.

³³⁵ *Oral Storytelling and Teaching Mathematics – Pedagogical and Multicultural Perspectives*, Michael Stephen Schiro, Sage Publications, 2004, p. 195.

4.1.2 Literacia e Numeracia.

Walter Ong³³⁶ demonstrou amplamente, na sua extensa bibliografia, como quaisquer formas heterogêneas de comunicação – desde o conto oral até ao ciberespaço – condicionam os nossos pensamentos, relações e culturas. Todavia, segundo o autor, as novas tecnologias não substituem as precedentes, mas interagem com elas, reforçando uns aspectos ou reformulando outros. É uma perspectiva que vem validar a noção de que incumbe à própria Matemática assumir, reforçar e reformular os seus vários instrumentos de comunicação, como meio indispensável para o seu subsequente crescimento e expansão. A terminologia, sucessivamente mais abstracta e piramidal, que tem por certo contribuído para a interiorização de pressupostos errados, relativamente ao conhecimento matemático, é igualmente causadora de um fenómeno de *inumeracia*, termo que designa o conjunto de ideias pré-concebidas resultantes da insuficiência ou má utilização de conceitos matemáticos na sua elaboração. John Allen Paulos³³⁷ identifica cinco desses pressupostos, que dificultam um maior grau de proximidade dos leitores em relação a textos matemáticos:

O primeiro e mais pernicioso pressuposto é que a Matemática não é mais do que um acto computacional.³³⁸

Os actos computacionais, como os algoritmos, as regras e as simulações não são de somenos importância, mas as dificuldades com a matemática resultam de uma insuficiente exposição ao pensamento e competências superiores da matemática e não da nossa falta de capacidade para realizar operações computacionais. (capítulo 1.1)

Que a Matemática é um conhecimento completamente hierarquizado é o segundo pressuposto.³³⁹

De facto existe uma relação cumulativa em algumas partes da matemática, mas muitas vezes este aspecto não tem a importância que aparenta. Em muitas circunstâncias consegue-se transmitir

³³⁶ Walter Ong (1912-2003), padre jesuíta, doutorou-se em literatura inglesa pela Universidade de Harvard. Dedicou-se à história e à filosofia da cultura e da religião. Autor de obras marcantes, tais como: *The Presence of the Word, Rhetoric, Romance, and Technology, In the Human Grain*, e *Orality and Literacy, The Technologizing of the Word* (abordada aqui).

³³⁷ John Allen Paulos (n. 1945), professor na Universidade de Temple, em Filadélfia, doutorou-se em Matemática pela Universidade de Wisconsin. Dedicou-se à divulgação científica e à reflexão pedagógica. Autor de obras relevantes, nomeadamente *Innumeracy, Beyond Numeracy* e *Once Upon a Number – the Hidden Mathematical Logic of Stories*, para além de contribuir regularmente com artigos para a Imprensa americana.

³³⁸ *Innumeracy – Mathematical Illiteracy and its Consequences*, John Allen Paulos, Hill and Wang, 1989, pp. XIII-XIV. Esta obra debruça-se sobre a dificuldade dos indivíduos lidarem com os grandes números e as probabilidades a eles associados, que resulta em políticas governamentais mal fundamentadas, decisões pessoais confusas e uma acrescida susceptibilidade à pseudociência de todos os géneros, apresentando algumas perspectivas para modificar o (ainda) presente *status quo*.

³³⁹ *Innumeracy – Mathematical Illiteracy and its Consequences*, John Allen Paulos, Hill and Wang, 1989, pp. XIII-XIV.

conceitos mais elaborados a alguém com poucos conhecimentos matemáticos, como acontece em obras de divulgação matemática³⁴⁰ ou em algumas obras literárias³⁴¹.

A construção de uma narrativa é um instrumento pedagógico tão eficaz na Matemática como em qualquer outra área do conhecimento e acreditar no contrário é o terceiro pressuposto errado.³⁴²

Na verdade, as práticas computacionais da matemática são importantes. No entanto, assim como não se deve confundir um linguista com um bom escritor, não se pode atribuir a alguém com uma capacidade excepcional de cálculo aritmético o dom de usar e compreender as ideias matemáticas. De facto, a matemática carece sempre de uma interpretação, conseguida através de associações mentais que se vão estabelecendo.

Our brain contains a mass of information that is linked by means of a vast web of associations. Most of these associations are built up as a result of years of untidy, concrete, specific human experience [...] Therefore, prose that concentrates on concrete and specific details is usually much better at triggering associations than prose that is abstract and general.³⁴³

³⁴⁰ *Os Problemas da Matemática*, Ian Stewart, Teorema, 1996; *Mythematics*, Michael Huber, Princeton University Press, 2009; *Fascínios da Matemática*, Theoni Pappas, Replicação, 1995.

³⁴¹ Podemos observar, por exemplo, uma construção literária em torno dos formalismos matemáticos, levados ao absurdo na realidade, em “Contos de Dedução”, pertencente à obra *Novas Cósmicómicas*:

...libertos finalmente da incômoda espessura das nossas pessoas e vozes e estados de ânimo, reduzidos a sinais luminosos, o único modo de estar apropriado a quem quiser identificar-se com o que diz, sem o zumbido deformante que a presença, nossa ou de outrem, transmite ao que dissermos. É certo que o preço a pagar é elevado, mas temos de aceitá-lo: não nos podemos distinguir dos tantos sinais que passam por esta estrada, cada um com o seu significado, que permanece oculto e indecifrável porque fora daqui já não há ninguém capaz de nos receber e entender.

in *Novas Cósmicómicas*, Italo Calvino, Editorial Teorema, 1995, p. 218.

Podemos também apreciar o seguinte trecho de *Alice no País das Maravilhas*, também pervertendo as regras da multiplicação numérica:

Let me see: four times five is twelve; and four times six is thirteen, and four times seven is – oh, dear! I shall never get to twenty at that rate!

in *The Annotated Alice*, Lewis Carroll, introdução e notas de Martin Gardner, W.W. Norton & Company, 2000.

Martin Gardner indica-nos que a explicação mais simples para a conclusão de Alice resulta do facto das tabelas de multiplicação antigas terminarem em doze, sendo o último valor quatro vezes doze, igual a dezanove (de acordo com a sequência da história), nunca chegando, então, ao 20. Outra explicação pode ser encontrada, segundo Gardner, em “Multiplication in Changing Bases: a Note on Lewis Carroll”, Francine Abeles, em *Historia Mathematica*, vol. 3 (1976), pp. 183-184.

³⁴² *Innumeracy – Mathematical Illiteracy and its Consequences*, John Allen Paulos, Hill and Wang, 1989, pp. XIII-XIV.

³⁴³ “Vividness in Mathematics and Narrative”, Timothy Gowers, *Circles Disturbed*, ed. Apostolos Doxiadis e Barry Mazur, Princeton University Press, 2012, p. 218.

Assim, a construção de um conto oral constitui uma das melhores formas de contextualizar a formalização matemática, ilustrando as suas limitações e ideias subjacentes, de uma forma vívida, específica e concreta.

O quarto pressuposto errado é que a Matemática é só para alguns.³⁴⁴

Apesar de existir quem escreva melhor ou pior, não é por esse facto que se torna aceitável que os que escrevem pior menosprezem o conhecimento da língua materna, só porque não serão mais tarde escritores ou jornalistas. Da mesma forma, a maioria dos seres humanos possui capacidades para desenvolver o conhecimento de noções numéricas, probabilísticas, de grafos e taxas de variação, de relações e argumentos matemáticos, com papéis determinantes no quotidiano, sob pena de não conseguirem compreender uma parte substancial da sua vida. Não deixa de constituir um facto que existe alguma persistência, no ensino da matemática, numa prática em que as perguntas difíceis, intrincadas ou enganadoras são guardadas para a avaliação, criando uma clivagem clara entre os alunos excepcionais e os outros. Este procedimento cria a falsa ideia de que são poucos os alunos com boas capacidades matemáticas. Tal como Steven Krantz afirma:

...some questions you should ask yourself frequently when you teach or write: “who is my audience? Am I trying to teach [...] or am I trying to impress myself? Am I trying to effect an educational experience? Or am I trying to put together an exam that I can show to my cronies while crowing about how dumb it proves the students to be?”³⁴⁵

Existe, assim, um estereótipo cultivado por diversos actores: por um lado, aqueles que justificam as suas insuficiências, normalmente relacionadas com a falta de dedicação, com essa coisa obscura que constitui o “ser só para alguns”; por outro, aqueles que gostam de fazer alarde da sua arte misteriosa e pretensamente complexa, que só alguns iluminados compreenderão, sendo enigmáticos e ostensivamente pouco compreensíveis ao explanar as suas ideias, alicerçando a sua explicação em formalismos inacessíveis ao comum dos mortais³⁴⁶.

Que a Matemática nos limita a liberdade de alguma forma é o quinto pressuposto errado.³⁴⁷

A perspectiva romântica afirma que uma preocupação excessiva com números impede a percepção das grandes questões do mundo. O poeta Walt Whitman escreve:

When I Heard the Learn'd Astronomer

³⁴⁴ *Innumeracy – Mathematical Illiteracy and its Consequences*, John Allen Paulos, Hill and Wang, 1989, pp. XIII-XIV.

³⁴⁵ *How to teach Mathematics*, Steven G. Krantz, American Mathematical Society, 1998, p. 57.

³⁴⁶ Ver nota 104.

³⁴⁷ *Innumeracy – Mathematical Illiteracy and its Consequences*, John Allen Paulos, Hill and Wang, 1989, pp. XIII-XIV.

When I heard the learn'd astronomer,
 When the proofs, the figures, were ranged in columns before me,
 When I was shown the charts and diagrams, to add, divide, and measure them,
 When I sitting heard the astronomer where he lectured with much applause in the lecture-room,
 How soon unaccountable I became tired and sick,
 Till rising and gliding out I wander'd off by myself,
 In the mystical moist night-air, and from time to time,
 Look'd up in perfect silence at the stars.³⁴⁸

Muitas vezes esta focalização nas “grandes questões do mundo” constitui mero obscurantismo, uma preferência pelo vago e misterioso, em detrimento de respostas, ainda que parciais. Talvez seja uma consequência da tendência das pessoas particularizarem o conhecimento, sendo iludidos pelas generalizações feitas com base nas suas próprias experiências ou pela forma como os meios de informação centram a sua actividade em exemplos específicos ou acontecimentos dramáticos e os tornam a norma que condiciona a sociedade.

These matters are not merely academic, and there is a direct way in which the mass media's predilection for dramatic reporting leads to extreme politics and even pseudoscience. [...] Furthermore, since perceptions tend to become realities, the natural tendency of the mass media to accentuate the anomalous, combined with an innumerate society's taste for such extremes, could conceivably have quite dire consequences.³⁴⁹

De certa forma acaba por ser essa particularização do conhecimento que limita a liberdade dos homens, na medida em que lhes retira a vontade de adquirir os instrumentos necessários a uma correcta análise da realidade e, consequentemente construir os processos mentais que permitam as melhores soluções para os problemas que diariamente enfrentam.

Quasi-mathematical questions arise naturally when one transcends one's self, family, and friends [...] What links this to that? Which is more likely? How do you integrate your projects with local, national, and international events? With historical biological, geological, and astronomical time scales? People too firmly rooted to the center of their lives find such questions uncongenial at best, distasteful at worst. [...] Getting such people interested in a numerical or scientific fact for its own sake or because it's intriguing or beautiful is almost impossible.³⁵⁰

³⁴⁸ <<http://www.poetryfoundation.org/poem/174747>>, em 30 de Junho de 2014.

³⁴⁹ *Innumeracy – Mathematical Illiteracy and its Consequences*, John Allen Paulos, Hill and Wang, 1989, pp. 131-132.

³⁵⁰ *Innumeracy – Mathematical Illiteracy and its Consequences*, John Allen Paulos, Hill and Wang, 1989, p. 109.

Esta noção reintroduz, em particular, a importância científica e pedagógica do conto oral, num contexto em que a Matemática e o ensino da Matemática se movem, talvez em excesso, num circuito em que o formalismo escrito, abstracto e generalista, tem um papel predominante e determinante.

Dizer que muitas mudanças na consciência e cultura humanas têm uma conexão com a passagem da oralidade para a literacia, não significa que a escrita (e a sua sucessora, a imprensa) seja a única causa de todas as transformações. [...] ...na produção alimentar, no comércio, na organização política, nas instituições religiosas, nas competências tecnológicas, nas práticas educativas, nos meios de transporte, na organização familiar, [...] muitos desses desenvolvimentos, se não todos, foram tão afectados pela passagem da oralidade para a literacia, como determinaram eles próprios essa transformação.³⁵¹

A natureza *pedagógica* do conto oral em sociedades iliteratas constitui uma evidência. Quer como reservatório de conhecimento, que se vai transmitindo de geração em geração, quer como instrumento sucessivamente aperfeiçoado na sua forma, para uma transmissão e construção mais eficaz do conhecimento, o conto oral reveste-se de uma importância fulcral na comunicação próxima e directa entre seres humanos.

Apesar de se constatar que existe “...uma incomensurabilidade entre a pragmática narrativa popular, que é imediatamente legitimante, e esse jogo de linguagem conhecido do Ocidente que é a questão da legitimidade, ou, melhor ainda, a legitimidade como referente do jogo interrogativo”³⁵², o conto oral de natureza matemática – se construído como um jogo interrogativo, que apela a uma base axiomática –, pode constituir-se como um meio de articular ideias, relações e argumentos, tornando a matemática personalizável e estabelecendo as pontes necessárias com outras áreas do conhecimento.³⁵³

Contudo, será necessário clarificar as diferentes facetas que o conhecimento matemático possui, e como poderá a narrativa oral ser útil para cada uma delas.

Em primeiro lugar, notemos que existem três componentes do ensino da matemática que, de seguida, passaremos a explicitar:

A conceptualização compreende a formulação correcta e objectiva das definições matemáticas, o enunciado preciso das proposições, a prática do raciocínio dedutivo, a nítida consciencialização de que as conclusões são sempre provenientes de hipóteses que se admitem, a distinção entre uma

³⁵¹ *Orality and Literacy: The Technologizing of the World*, Walter Ong, New Accents, 1982, p. 172.

³⁵² *A Condição Pós-Moderna*, Jean-François Lyotard, trad. José Navarro, Lisboa, Editora Gradiva, 2003, p. 54.

³⁵³ “...será [...] preciso que a transmissão do saber não esteja limitada à das informações, mas que ela englobe a aprendizagem de todos os procedimentos capazes de melhorar a capacidade de conectar campos que a organização tradicional do saber isola ciosamente.” in *A Condição Pós-Moderna*, Jean-François Lyotard, trad. José Navarro, Lisboa, Editora Gradiva, 2003, p. 106.

afirmação e a sua recíproca, o estabelecimento de conexões entre conceitos diversos, bem como a interpretação e a reformulação de ideias e factos sob diferentes formas e termos.³⁵⁴

Com efeito, toda a narrativa – e em particular os contos orais – nasce, ela própria, de uma conceptualização que pode debruçar-se especificamente sobre qualquer dos aspectos mencionados na citação anterior (ver 2.3). Assim, as questões conceptuais do ensino da matemática poderão ser abordadas com recurso a contos orais.

A manipulação [...] está para o ensino e aprendizagem da Matemática como a prática dos exercícios e escalas musicais está para a música. [...] A habilidade e a destreza na utilização de equações, fórmulas e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas [...] permite ao manuseador da matemática concentrar a sua atenção consciente nas questões realmente cruciais...[...]³⁵⁵

Consideremos as ideias de Wittgenstein sobre os fundamentos da matemática, que opõem a utilização prática dos conceitos e instrumentos matemáticos à sua veracidade:

- Then do you want to say that 'being true' means: being usable (or useful)?
- No, not that; but that it can't be said of the series of natural numbers – any more than of our language – that it is true, but: that it is usable and, above all, it is used.³⁵⁶

Por outro lado, Wittgenstein afirma que a linguagem possui uma natureza inacabada e inventiva:

There are [...] countless different kinds of use of what we call "symbols", "words", "sentences". And this multiplicity is not something fixed, given once for all; but new types of language, new language-games, as we may say, come into existence, and others become obsolete and get forgotten. (We can get a rough picture of this from the changes in mathematics.) Here the term "language-game" is meant to bring into prominence the fact that the speaking of language is part of an activity, or of a form of life.³⁵⁷

Assim, a utilização dos instrumentos básicos da matemática pode ser feita de novas formas, nomeadamente criando narrativas e, em particular, contos orais. Mas não se pense que esta criação constitui um evento artificial. Ao longo da história vários autores criaram obras literárias recorrendo, de forma natural, a este tipo de auxiliares estruturantes:

I am proposing that mathematical objects can be used as shaping instruments for the purpose of vivid storytelling. [...] Such elements may be used to formally shape the structure of a literary

³⁵⁴ *Matemática e Ensino*, Elon Lages Lima, Gradiva, 2004, p. 121.

³⁵⁵ *Matemática e Ensino*, Elon Lages Lima, Gradiva, 2004, p. 122.

³⁵⁶ *Remarks on the Foundations of Mathematics*, Ludwig Wittgenstein, eds. G. H. von Wright, R. Rhees, G. E. M. Anscombe, MIT Press, 1956, pp. 37-38.

³⁵⁷ *Philosophical Investigations*, Ludwig Wittgenstein, Basil Blackwell Lda., 1953, p. 9.

work, or they may inform a text in singular ways as agents and counteragents, as simple devices or transcendent abstractions. [...] The primary concern of this study is to explore the unpremeditated use of mathematics as a narrative tool – as a natural aspect of language...[...] If these studies demonstrate that the art of mathematics is a continuing presence in the venerable science of storytelling, this book will have served its purpose.³⁵⁸

Deste ponto de vista, as estruturas matemáticas podem ser usadas na construção de narrativas, de tal forma que essas narrativas constituam instrumentos pedagógicos que auxiliem a assimilação das ideias matemáticas subjacentes a essas estruturas, em sucessivos movimentos de explicitação.

As aplicações são utilizações das noções e teorias da Matemática para obter resultados, conclusões, previsões e situações que vão desde problemas triviais do dia-a-dia, a questões mais subtis que surgem noutras áreas, quer científicas, quer tecnológicas, quer mesmo sociais. [...] as aplicações do conhecimento matemático incluem a resolução de problemas...³⁵⁹

Torna-se assim evidente que também se podem construir contos orais associados às aplicações da matemática, para além das outras duas componentes do ensino da matemática, em virtude das suas ligações umbilicais com os mais diversos aspectos da cultura humana.

De seguida, constitui-se como fundamental perceber como o conhecimento se transmite e que características este possui, em sociedades orais primárias – em termos de primado histórico e não com uma conotação de selvagens ou bárbaras –, mas também na própria experiência oral contemporânea.

Em primeiro lugar, os conceitos são gravados com recurso a mnemónicas e fórmulas orais, uma vez que não existe um suporte físico que permita encriptar os dados. Isto possibilita um acesso imediato ao que desejamos saber.

Em segundo lugar, existe um conjunto de modelos de organização da oralidade, que constituem auxiliares essenciais na assimilação e compreensão dos saberes:

- estabelece-se uma organização aditiva e não subordinativa, isto é, cria-se um cordão narrativo e não uma teia gramatical, como no discurso literato – na introdução de qualquer conhecimento, nomeadamente matemático, é necessário esse primeiro fio condutor (o enunciar dos dados iniciais), a partir dos quais se constitui uma sucessão de eventos, com um fim determinado;
- a linguagem é agregativa e não analítica, expressa uma forma concreta e não uma generalização abstracta – o mar raivoso ou a linda princesa, em vez do mar e da princesa, sem

³⁵⁸ *Noble Numbers, Subtle Words – The Art of Mathematics in the Science of Storytelling*, Barbara M. Fisher, Associated University Presses, 1997, pp. 11-13.

³⁵⁹ *Matemática e Ensino*, Elon Lages Lima, Gradiva, 2004, p. 122.

mais – que constitui o primeiro passo de qualquer ensino, a exemplificação concreta que, no caso da matemática, pode não se materializar de maneira formal;

- tem uma natureza redundante, uma vez que não é possível uma recursividade, como na escrita – uma ideia tem de ser sublinhada repetidamente, na medida em que não é possível a quem ouve voltar atrás para tentar perceber algo que lhe escapou à compreensão – algo que faz claramente parte do discurso necessário à aprendizagem da matemática, a construção de vários cenários até as ideias estarem rigorosamente assimiladas;
- a oralidade é conservativa e tradicionalista, isto é, preserva o conhecimento na narrativa, sendo inovada na forma como é apresentada, dada a necessidade de se adequar ao público e ao seu contexto cultural e etário – um aperfeiçoamento e adaptação na prática pedagógica requeridos a qualquer educador;
- estabelece-se uma relação directa entre o quotidiano e o conhecimento transmitido, não existe uma neutralidade do discurso, afastado do ouvinte – tal como no acto pedagógico, onde tem de existir uma ligação entre o que o professor transmite e a capacidade hermenêutica (interpretativa) do aluno;
- possui uma componente agonística (de debate argumentativo) , na medida em que coloca o conhecimento no centro da sua expressividade, ao invés da escrita, que normalmente recolhe os resultados da refrega *à posteriori* – esta qualidade permite ao educando a construção do saber de forma crítica, resultante do diálogo que estabelece com o docente;
- tem uma natureza empática e que estimula a participação, algo muito diferente da objectividade distante que a escrita estabelece entre conhecedor e conhecimento – obviamente que a motivação do aluno nasce da capacidade do professor cultivar a empatia com ele e, com isso, estabelecer uma comunicação e partilha frutuosa;
- a homeostasia da oralidade, isto é, a manutenção dos significados de acordo com as suas utilizações comuns, sem a proliferação de significados da linguagem escrita – na linha da definição clara da nomenclatura da área da matemática a que se reporta o pedagogo;
- a sua natureza situacional e não abstracta, na medida em que as palavras se referem a situações concretas e não a definições conceptuais – como os processos que se ensinam primeiro em contextos mais simples e só depois se complexificam e generalizam.

Estas características condensam um conjunto de instrumentos práticos pedagógicos que não podem ser abolidos, com o risco de quebrarmos sinapses comunicacionais, geradoras da nossa cultura ao longo da História.

Outro aspecto da problemática que temos vindo a tratar, consubstancia-se na importância da literacia para a evolução do conhecimento humano:

A literacia é absolutamente necessária para o desenvolvimento da Ciência, da História, da Filosofia e da compreensão da própria linguagem (incluindo a sua parte oral)³⁶⁰

Como explica Walter Ong³⁶¹, a literacia criou um discurso autónomo, em que o autor deixa de ser elemento central, sendo remetido para uma posição instrumental perante o conhecimento. Um discurso de natureza similar era utilizado em alguns rituais oraculares ou religiosos, pois também nesta situação o autor ou orador limitava-se a retransmitir as palavras dos deuses, que não podiam ser directamente questionados, tal como pode acontecer em qualquer obra escrita. No entanto, esta tem como característica manter-se inalterada, independentemente das críticas ou refutações que dela se possam fazer, criando uma confusão entre o que está escrito e o que é verdadeiro. O que está escrito não é necessariamente verdadeiro e, mesmo que o seja, não tem que ser a «verdade» assumida por um determinado contexto cultural. Por isso tantas vezes, ao longo da História, livros foram queimados, na medida em que só a sua destruição anularia a sua essência subversiva ou enganosa, à luz de uma «verdade» fugaz e contextualizada³⁶². O que torna o problema da legitimação do conhecimento ainda mais interessante é o facto de, inicialmente, a literacia ser vista como um instrumento que se apropriava da informação do cérebro humano, esvaziando-o do seu conteúdo – por um lado, gerindo processos que deviam ser intrínsecos ao cérebro, por outro, prejudicando o seu funcionamento, na medida em que tornava algumas das suas funções desnecessárias. Aliás, nos primórdios da literacia, muitas obras eram escritas na forma de diálogo, numa clara aproximação à transmissão oral precedente. Um dos autores mais importantes foi Platão que, sendo discípulo de Sócrates, via no diálogo a metodologia ideal para explanar os sucessivos questionamentos e confrontações de ideias, até obter uma síntese da solução para a problemática em causa, tão característica da sua filosofia (dialéctica). Foi essa a forma assumida pela maioria das suas obras, tendo-se até debruçado sobre as distinções entre a literacia e a oralidade numa delas:

...ó muito inventivo Theuth [...] tu, que és o pai da escrita, foste conduzido pela tua afeição a atribuir-lhe um poder oposto ao que realmente possui. Pois isso vai produzir esquecimento na mente daqueles que a aprendem: eles não vão exercitar a memória por causa da sua confiança na escrita, que é algo exterior (éksothen), provinda de caracteres alheios, e não vão eles mesmos

³⁶⁰ *Orality and Literacy: The Technologizing of the World*, Walter Ong, New Accents, 1982, pp.14-15.

³⁶¹ *Orality and Literacy: The Technologizing of the World*, Walter Ong, New Accents, 1982, pp. 77-78.

³⁶² Os códices pré-hispânicos, perdidos no fogo durante a época colonial, ou a destruição nazi de milhares de livros judaicos, são bons exemplos. Contudo, também constitui outro aspecto desta problemática as leituras oficiais instituídas, como o *Livro Vermelho*, com citações de Mao-Tsé-Tung, de distribuição subsidiada pelo governo comunista chinês. Durante a *Revolução Cultural*, o livro passou a ser estudado, não só nas escolas, mas também no local de trabalho, onde eram organizadas sessões de leitura do livro durante várias horas por dia. A Bíblia, o Corão e outras obras de teor teológico são igualmente utilizadas por fundamentalistas, através de uma interpretação conveniente, para fazer prevalecer uma determinada manifestação ou ideia religiosa.

praticar a lembrança interior (éndotheren), por si mesmos. Tu inventaste um elixir da lembrança (hypomnéseos), e não da memória (mnémes), e tu ofereces aos teus discípulos uma aparência de sabedoria, não verdadeira sabedoria, pois se tornarão muito informados (polyékooi [...]) gignómenoi), sem instrução, (áneu didakhês) e terão, assim, a aparência de que sabem de várias coisas (polygnómenes) quando na verdade são, na maior parte, ignorantes e difíceis de conviver, já que não são sábios, mas apenas aparentam ser.³⁶³

Como se pode observar, a visão platónica da palavra escrita reflecte o receio pelo esvaziamento de significado do próprio homem, remetendo-o e às suas vivências para um plano secundário, até ao ponto em que a memória se perde e sobram as lembranças que vêm nos textos, que verdadeiramente não lhe pertencem. E ficará convencido que todas elas juntas constituem algo de importante, um sinónimo de saber.

Outro problema que um texto apresentava era a impossibilidade de com ele dialogar, não respondendo a dúvidas, nem argumentando respostas, permanecendo estático, perante a dinâmica do questionamento humano.

A escrita (graphé), Fedro, tem essa estranha qualidade, e é muito semelhante à pintura (zoographía); pois ela coloca as suas criações como seres vivos (zônta), mas se alguém lhes perguntasse algo, continuariam a preservar seu silêncio solene. Assim são as palavras num texto. Podemos pensar que elas falam como se tivessem inteligência (phronoúntas), mas se lhes perguntamos algo desejando saber mais sobre seus dizeres, elas sempre indicam só uma única coisa, o mesmo.³⁶⁴

Estas reservas, levantadas por Platão, em relação à palavra escrita, são identificáveis com algumas das objecções que temos hoje em relação às novas tecnologias, de uma forma que se revela quase cíclica. No entanto, esse facto não coibiu Galileu Galilei de construir uma das suas obras mais importantes na forma de diálogo. Em Diálogo dos Grandes Sistemas, Galileu compara o sistema geocêntrico (de Ptolomeu) com o heliocêntrico (de Copérnico). O Papa desse tempo, Urbano VIII, autoriza-o a escrever esse livro desde que fale dos dois sistemas, sem tomar partido pelo sistema heliocêntrico, suposto como mera hipótese. O livro é publicado em 22 de Fevereiro de 1632 e a sua forma permite, através de um debate entre três personagens, partilhado por escrito, que seja autorizada a sua divulgação, pois acaba por ser encarado pela igreja católica mais como um texto literário³⁶⁵, do que como um texto científico.

³⁶³ Fedro, Platão, trad. José Ribeiro Ferreira, Lisboa, Edições 70, 1997, p. 274.

³⁶⁴ Fedro, Platão, p. 275.

³⁶⁵ O Papa, anteriormente amigo e admirador do sábio italiano (quando era o cardeal Maffeo Barberini), sente-se ridicularizado numa personagem do livro, defensora do geocentrismo (os inimigos de Galileu tiveram a habilidade de convencê-lo nesse sentido). A fúria do Papa é imensa e o livro é proibido.

Como se percebe do que foi escrito anteriormente, a linguagem e os pensamentos oralizados não são reconhecidos pela sua precisão analítica. Essa constitui a vantagem da palavra escrita. Para se conseguir sem gestos, sem expressão facial, sem entoação, transmitir um conhecimento, tem que se procurar todos os possíveis significados de uma palavra ou de uma afirmação, de forma a possibilitar que qualquer leitor, em qualquer situação, possua uma visão clara do que se pretende transmitir, unicamente através de um texto, evidentemente distante da oralidade.

A necessidade de conexão entre as diversas partes do universo matemático estabeleceu, ao longo do tempo, precisamente uma necessidade de rigor analítico e de generalização, que requer um suporte não oral. Poder-se-ia pensar que, então, a Matemática só pode existir num contexto escrito que a consiga albergar, à medida que se expande e diversifica. No entanto, é nas franjas desse corpo de símbolos, no diálogo com a teoria escrita, que o conhecimento matemático evolui. A obra Matemática escrita actual jamais conseguirá entrar em ressonância, toda e completamente, com um ser humano. A este só estará acessível o que lhe for possível constituir como seu, resultado da sua comunicação com axiomas, teoremas e teorias. George Steiner³⁶⁶ afirma:

É evidente que a formação matemática do amator será modesta. De um modo geral, apreenderá apenas uma parte da inovação científica, obtendo um relance momentâneo e incerto de uma continuidade e a imagem grosseira que a partir deste último for capaz de construir.³⁶⁷

Apesar da afirmação de Steiner – e aqui tomo “amador” também como aquele que ama –, não se poderá ter uma postura fatalista ou de resignação perante estes factos. A história da humanidade mostra que foi assumindo as limitações, mas mantendo uma postura dinâmica, quase estóica, que se conseguiram as conquistas que nos trouxeram até à modernidade que nos rodeia e que nos preenche.

A matematização nasceu com algoritmos simples que, utilizando noções abstractas (porque não utilizando os seus referentes concretos), estabeleceram métodos práticos de resolução de problemas, formulados da experiência empírica. Cresceu quando se vislumbrou a sua distância em relação à realidade, numa verdade repetida: “Quase como queria Espinoza, dum lado está o pensamento, do outro a matéria”, sendo a “matemática uma ciência só dentro de si própria”, “não aplicável à realidade”, nas palavras do poeta Fernando Pessoa³⁶⁸; “...na língua e pensamentos” que a matemática suscita, mas “que não se referem, nem pelo sentido, nem pelo tempo, a nenhuma terra conhecida”, como nos diz Michel Serres³⁶⁹. Criou bases largas quando se percebeu que a sua

³⁶⁶ Francis George Steiner (n. 1929), crítico literário, ensaísta, filósofo, romancista e educador franco-americano, possuindo formação superior em matemática e física. Escreveu amplamente sobre as relações entre linguagem, literatura e sociedade. A sua obra na área da crítica literária abordou particularmente questões culturais e filosóficas sobre a tradução e a natureza da linguagem e da literatura.

³⁶⁷ *No Castelo do Barba Azul*, George Steiner, Relógio D'Água, 1992, p. 134.

³⁶⁸ *A Procura da Verdade Oculta*, Fernando Pessoa, org. António Quadros, Publicações Europa-América, 1989, p. 75.

³⁶⁹ *A Origem da Geometria*, Michel Serres, Terramar, 1997, p. 10.

vantagem não estava na perfeição das suas ideias, mas na sua capacidade de tradução da multiplicidade universal:

“A filosofia é escrita neste grandiosíssimo livro que continuamente está aberto à nossa frente (falo do universo), mas não se pode entender se antes não se aprender a entender a língua, e a conhecer os caracteres em que está escrito.” [...] Assim, quando se fala de alfabeto, Galileu entende um sistema combinatório capaz de dar conta de toda a multiplicidade do universo. [...] Enquanto partidário da geometria, Galileu teria de defender a causa da superioridade das formas geométricas, mas enquanto observador da natureza, rejeita a ideia de uma perfeição abstracta e opõe a imagem da Lua “montanhosa, áspera e desigual”, à pureza dos céus da cosmologia aristotélico-ptolomaica.³⁷⁰

Esta ligação entre a matemática e os fenómenos físicos criou uma capacidade de previsão, que estimulou a crença de que se poderia compreender o universo, nas sucessivas descobertas associadas a nomes de homens: o método científico de Galileu; as leis dos movimentos dos planetas de Kepler; as leis da gravitação universal e da mecânica de Newton. A multiplicidade exponencial trouxe a complexidade e, com ela, a necessidade de uma criação cooperativa ou colectiva. Matemáticos em diferentes pontos do globo descobriam os mesmos conceitos de forma independente³⁷¹, ou uniam-se com os mesmos propósitos³⁷². Assim, a matemática tornou-se impessoal e nós, meros instrumentos:

Platão, Leonardo da Vinci e Newton tinham visões do mundo diferentes, as visões estavam unificadas e o homem desempenhava um papel central em todas elas. A ciência actual também procura arduamente uma visão unificada do universo, mas [...] nós, seres humanos, não passamos de um acidente insignificante.³⁷³

Nas outras ciências, também ocorreu, em parte, essa instrumentalização do ser humano, fruto da sua progressiva matematização e institucionalização em laboratórios, com critérios de produtividade. Numa sociedade cada vez mais dependente da ciência – e da consequente tecnologia –, esse facto revela a importância fulcral de saber matemática:

A ciência contemporânea é fundamentalmente matemática; o desenvolvimento de uma formalização matemática rigorosa assinala a evolução de cada disciplina dada [...], até à sua plena maturidade científica. Sem saber matemática, ou sabendo muito pouco, o “leitor comum” é excluído do campo. Quando se esforça por se apropriar do sentido de um argumento científico, sente-se confuso ou recorre a uma metáfora inadequada para captar a realidade do processo. [...] À medida que o processamento e a codificação dos dados ocupam zonas cada vez mais vastas dos

³⁷⁰ *Porquê Ler os Clássicos*, Italo Calvino, Teorema, 1991, pp. 82-83 e 85.

³⁷¹ Como Bolyai, Lobachevski e Gauss, relativamente à geometria hiperbólica.

³⁷² Como Nicolas Bourbaki, pseudónimo de dezenas de matemáticos com o objectivo de fundamentar toda a matemática na teoria de conjuntos.

³⁷³ *O Cérebro do Matemático*, David Ruelle, Gradiva, 2007, p. 222.

aspectos económicos e sociais da nossa existência, o analfabeto em matemática ver-se-á cada vez mais marginalizado.³⁷⁴

Muitos perigos se perfilam, que vão desde um certo grau de isolamento relativamente à matemática, aos seus conceitos e ideias e às suas aplicações, passando pelo conhecimento deturpado ou ilusório das mesmas, até à segregação social daí resultante.

Temos então que decidir se desejamos uma sociedade estratificada, em que os indivíduos estão cada vez mais isolados e alienados do que os rodeia, distanciados do conhecimento para solucionar os seus problemas, ou se desejamos uma participação mais activa, uma verdadeira vivência e partilha comunitária, um conhecimento ao alcance de todos. Como escreveu Bertrand Russell:

A transmissão de conhecimentos através da educação sempre teve dois objectivos: por um lado, dar a quem os recebe instrumentos de trabalho prático; pelo outro lado, dar-lhes uma coisa mais vaga, a que poderemos chamar sabedoria. [...] A ciência torna possível o conhecimento dos meios para atingir um fim determinado, mas não nos ajuda a decidir quais os fins que vale a pena escolher.³⁷⁵

Se, de facto, caminhamos para uma alienação indesejável, em resultado da nossa incúria em relação à universalidade do ensino da matemática, uma atitude cooperativa revela-se fundamental na assimilação e divulgação desta área do conhecimento humano, tendo a preocupação de torná-la mais acessível, de traduzi-la noutras linguagens, de expressá-la em obras de arte, de estabelecer como prioridade a disponibilização das suas ideias essenciais, em detrimento de uma supremacia, no ensino, do seu enriquecimento sintáctico, a bem da possibilidade de um acesso democrático ao conhecimento científico, em particular o matemático.

4.2 Aplicações da Oralidade na Matemática.

4.2.1 Antes de contar uma história.

As histórias possuem diferentes formatos e características. Umas são reais, outras são ficcionais, umas são em prosa, outras são em verso, umas fomentam a reflexão, outras, o questionamento, umas provocam o choro, outras, o riso. Há histórias que o leitor deseja que não terminem, outras em que quer conhecer avidamente o final.

A teoria literária distingue os diferentes tipos de narrativas: contos populares, contos de fadas, mitos, lendas, ensaios, fábulas, parábolas, baladas, etc. Existem também narrativas históricas ou actuais.

As narrativas surgiram da cultura oral, como meio de preservar a herança cultural e a história. Subsequentemente, com o advento da cultura impressa, os livros e a imprensa escrita tornaram-se a

³⁷⁴ *No Castelo do Barba Azul*, George Steiner, Relógio D'Água, 1992, pp. 133-134.

³⁷⁵ *Realidade e Ficção*, Bertrand Russell, Publicações Europa-América, 1965, p. 166.

principal fonte de narrativas. No presente, o cinema, a televisão ou até os jogos em suportes tecnológicos podem transmitir narrativas.

Mas o que releva, neste capítulo, não são os eventos da sequência que constitui a narrativa – a sua estrutura –, mas sim o tipo de relacionamento que uma narrativa pode ter com os conceitos matemáticos. Rina Zazkis e Peter Liljedahl distinguem entre narrativas que acompanham os conceitos e narrativas que se interligam com os conceitos³⁷⁶. As histórias que acompanham os conceitos podem ser derivadas de muitos episódios da história da matemática ou da vida de matemáticos importantes. As histórias que se interligam, nas quais os conteúdos matemáticos emergem da história, são mais difíceis de elaborar.

Por outro lado, torna-se fundamental enquadrar os diversos conteúdos da matemática, não só porque possuem diferentes características, mas também para possibilitar uma definição mais clara dos objectivos a serem alcançados. Escolhendo quatro grandes áreas (podem existir narrativas que envolvam mais do que uma área, ou que possibilitem a escolha da área matemática com a qual o leitor quer interpretá-la ou analisá-la), apenas por comodidade explicativa, consideremos as seguintes: Geometria e Medida; Álgebra e Funções; Probabilidades e Estatística; Números e Operações³⁷⁷.

Considerem-se também alguns pontos de contacto entre matemática e narrativa, identificados em 2.3, nomeadamente:

1- Retrato, numa narrativa literária, do destino de um matemático, real ou ficcionado, como função dos seus projectos intelectuais (a ênfase não está na matemática, mas na percepção artística do seu criador e do processo criativo, logo será sempre uma narrativa que acompanha os conceitos matemáticos, de uma forma introdutória).

2 – Uso de um elemento matemático (código, enigma, fórmula, padrão geométrico) como elemento-chave no desenvolvimento e acção da história (a narrativa constrói-se em torno do conceito. Se este for explicitado – ou se for possível explicitá-lo – no final, a narrativa pode constituir-se como uma narrativa que acompanha o conceito).

3 – Uso de fórmulas geométricas ou numéricas, processos ou padrões para determinar a composição ou arquitectura de uma narrativa, e a sua ocasional predominância sobre factores miméticos ou temáticos (o conceito matemático surge como elemento estruturante da narrativa. Se a narrativa constituir em si mesma uma explicação pedagógica desse elemento estruturante, temos uma narrativa que se interliga com o conceito matemático. Se tal não ocorrer, a narrativa torna-se apenas mais uma aplicação desse conceito).

³⁷⁶ *Teaching Mathematics as Storytelling*, Rina Zazkis, Peter Liljedahl, Sense Publishers, 2009, pp. 37-38.

³⁷⁷ Áreas definidas para o ensino da matemática no ensino básico da matemática em Portugal.

4 – O uso de noções matemáticas (infinito, regressão infinita, permutações) como o elemento temático fundamental ou situação básica inicial de uma narrativa (a narrativa parte do conceito e explora-o sob uma perspectiva não formal, sendo uma narrativa que se interliga com o conceito matemático, que o desmonta e clarifica.)

De outro ponto de vista, existe um conjunto de factores a analisar, que relevam para o cumprimento dos objectivos pré-determinados pelo autor.

O *argumento* constitui o esforço consciente do autor para criar a estrutura da história, que cumprirá o propósito por ele pretendido. A sua função assenta na capacidade de guiar o ouvinte através da história, condicionando não apenas os seus sentimentos, mas também os seus pensamentos. O objectivo dos argumentos que pretendemos construir, no contexto desta tese, vão para além do suscitar de uma relação empática com a história, são instrumentos que servem a recolha e utilização de instrumentos matemáticos por parte dos alunos. Jean Piaget e Ulric Neisser afirmaram que a acção – neste caso narrativa – determina e é determinada por modelos mentais, denominados *esquemas mentais*³⁷⁸ – que constituem representações mentais de conjuntos de percepções, de ideias ou acções, que estão co-relacionadas – que são estruturados e hierárquicos. Este conceito e a noção de algoritmo são fundamentais para a definição da noção de *argumento*, instrumento que delimita e ordena as escolhas numa determinada situação³⁷⁹

A conflitualidade na narrativa constitui outra questão a ter em conta. Desde muito cedo o ser humano utiliza os opostos binários (frio/quente, por exemplo), uma vez que seria mais problemático reconhecer a natureza complexa do mundo que nos rodeia. Esta classificação binária que utilizamos inicialmente ajuda-nos a orientar o pensamento e a obter uma perspectiva dos fenómenos que nos rodeiam. Apesar da ideia de oposição binária constituir uma das formas básicas de construir uma narrativa ficcional, vai para além de um mero instrumento para captar a atenção do leitor. Na realidade, esta forma de construção capta a atenção do leitor porque o ser humano já possui a propensão para apreciar este tipo de narrativa. No entanto, ao construir a narrativa para transmitir um

³⁷⁸ “A schema is that portion of the entire perceptual cycle which is internal to the perceiver, modifiable by experience, and somehow specific to what is being perceived. The schema accepts information as it becomes available at sensory surfaces and is changed by information; it directs movements and exploratory activities that make more information available, by which it is further modified.” in *Cognition and reality: Principles and implications of cognitive psychology*, Ulric Neisser, W. H. Freeman, 1976, p. 54.

³⁷⁹ O *argumento* constitui, assim, o resultado de um trabalho reflexivo, com resultados que servem os propósitos do autor:

“The existence of *scripts* as guides for cognitive functioning indicates that a lot of the work of representation that goes into a narrative is already there before the action it describes has occurred: mental representations are not just mirrors held up to nature but molds for shaping it.” in *Circles Disturbed – the Interplay of Mathematics and Narrative*, orgs. Barry Mazur e Apostolos Doxiadis, Princeton University Press, 2012, pp. 292-293.

“Writing, as has been seen, is essentially a consciousness-raising activity. The tightly organized, classical plotted story both results and encourages heightened consciousness...” in *Orality and Literacy: The Technologizing of the World*, Walter Ong, New Accents, 1982, p.147.

conceito matemático, deseja-se que, no final, o leitor esteja alinhado com a personagem que apresentou o novo conceito – em alternativa ao conhecido inicialmente pelos alunos. Repare-se que não se pretende criar apenas uma ligação emocional entre os ouvintes e uma determinada personagem, mas uma concordância intelectual. Como tal, existe sempre uma personagem com quem os alunos se identificam emocionalmente, no início da história, mas o objectivo passa por terem uma ligação intelectual com a personagem que lhes introduz o novo conceito matemático – que até pode ser a mesma personagem com a qual criaram o vínculo afectivo inicialmente.³⁸⁰

As imagens evocadas por uma palavra dita podem suscitar uma reacção emocional tão forte como uma imagem real. Essas imagens constituíam o principal instrumento de memorização utilizada nas culturas orais tradicionais. A contextualização, através da descrição sumária do ambiente onde enquadramos o que queremos transmitir, constitui uma das técnicas que podem ser usadas para amplificar o impacto de uma determinada imagem da narrativa construída.³⁸¹

O conhecimento constitui um produto das experiências, expectativas e receios dos seres humanos. Sendo esse sentir fundamental para o desenvolvimento do conhecimento, o seu significado não pode ser verdadeiramente compreendido se for observado como um empreendimento sem a influência da história, da cultura ou das emoções humanas. Os manuais tendem a disfarçar essa verdade simples, diminuindo a possibilidade de uma experiência intensamente vivida, ao relevar uma linguagem neutra, em detrimento de uma mediação participada com o aluno, que será aquela que poderá estabelecer as pontes entre o objecto e o sujeito da aprendizagem. Considerando que as emoções são instrumentos fundamentais para facilitar a aprendizagem, o segredo está em mostrar o conhecimento como um produto da invenção, paixão, energia, esperança e medo humanos. Ao invés de apresentar o conhecimento como um produto acabado, poder-se-á torná-lo memorável e pleno de

³⁸⁰ Lévi-Strauss analisava a estrutura narrativa do ponto de vista de opostos binários. Estes constituem conjuntos de valores antagónicos que revelam a estrutura dos textos. Para ele, os opostos binários constituem a primeira operação lógica realizada pelas crianças. No entanto, esta perspectiva não é consensual, como se pode observar das palavras de Walter Ong:

“A análise Estruturalista, como foi desenvolvida por Claude Lévi-Strauss, focou-se amplamente na narrativa oral. Ele e os seus numerosos seguidores deram, de um modo geral, pouca ou nenhuma atenção à psicodinâmica específica da expressão oral [...] todas as estruturas discernidas acabam por ser binárias (vivemos na era dos computadores), e o binarismo é alcançado dispensando elementos, por vezes cruciais, que não encaixam no padrão binário. Estudos sobre a oralidade, enquanto tal, revelaram que a narrativa oral nem sempre é construída de acordo com a análise Estruturalista binária, ou mesmo com a rígida análise temática que Propp (1968) aplicava à narrativa da tradição oral.” in *Orality and Literacy: The Technologizing of the World*, Walter Ong, New Accents, 1982, p.161.

³⁸¹ Ítalo Calvino trata precisamente da forma como as imagens suscitam a construção da narrativa (e, por sua vez, as palavras estimulam o despontar de imagens no leitor), numa das seis propostas que apresenta para a criação narrativa – neste particular aquela que Calvino definiu como *visibilidade*:

“Mesmo quando lemos o livro científico mais técnico ou o livro de filosofia mais abstracto, pode-se encontrar uma frase que inesperadamente sirva de estímulo à fantasia figurativa. Assim, estamos num dos casos em que a imagem é determinada por um texto escrito pré-existente e do qual se pode extrair um desenvolvimento fantástico, tanto no espírito do texto de partida, como numa direcção completamente autónoma.” in *Seis Propostas para o Próximo Milénio*, Ítalo Calvino, Teorema, 1990, pp. 109-110.

sentido, reintroduzindo-o no contexto da sua invenção ou utilização humana original. Isto corresponde ao ensino na terceira pessoa, isto é, mostrando a importância da matemática na resolução de problemas com o qual outro ser humano se deparou. Mas mais ambicioso que isso será consegui-lo na primeira pessoa, levando o aluno a resolver os problemas por si e a comparar a sua resolução com a conseguida pela terceira pessoa acima mencionada, tornando a matemática parte do seu conhecimento individual e não um objecto que lhe seja exterior.³⁸²

O *deslumbre* surge quando se confronta um acontecimento de beleza e dramatismo surpreendentes. Tudo constitui possível objecto de observação, à luz da noção de *deslumbre*. As narrativas deslumbrantes, que podem ser elaboradas em torno desses potenciais objectos de observação, são um mecanismo de questionamento intelectual, parte integrante da racionalidade literária. Essas interrogações resultam, ao nível da matemática, num momento iniciador do raciocínio científico. Por outro lado, manter o sentimento de deslumbramento estimula a imaginação e o entusiasmo na pesquisa. Seguramente que quem ensina também gosta de descobrir e utilizar um motivo de deslumbramento em cada conteúdo que transmite. Assim, prolongar o efeito de *deslumbre* no ensino melhora substancialmente a motivação de quem ensina e de quem aprende. Constitui, assim, um aspecto fundamental a ter em conta na elaboração de narrativas para a transmissão de conceitos matemáticos.³⁸³

³⁸² Neste particular, a teoria da Educação Imaginativa constitui uma resposta consistente ao anseio por uma educação que crie essa ligação afectiva entre o conhecedor e o conhecimento. Esta teoria, que possui um grupo de investigação na Universidade de Simon Fraser, em Vancouver (I.E.R.G. ou Imaginative Education Research Group), baseia-se na premissa de existirem cinco formas distintas de compreensão, que permitem entender o mundo de diferentes formas: compreensão somática (pré-linguística), compreensão mítica (linguagem oral), compreensão romântica (linguagem escrita), compreensão filosófica (uso teórico da linguagem, reconhecimento de padrões linguísticos) e a compreensão irónica (uso reflexivo da linguagem, reconhecimento das insuficiências da linguagem). Constitui o seu propósito permitir a cada aluno o desenvolvimento destas cinco formas de compreensão, independentemente do conteúdo que seja abordado. Na educação imaginativa, os instrumentos de pensamento que foram inventados e desenvolvidos ao longo da história cultural são recapitulados. A teoria encontra-se intimamente associada às teorias socioculturais do psicólogo russo, Lev Vygotsky:

“Vygotsky argued that intellectual development cannot adequately be understood in epistemological terms that focus on the kinds and quantities of knowledge accumulated or in psychological terms that focus on some supposed inner and spontaneous developmental process. Rather, he understood intellectual development in terms of the intellectual tools, like language, that we accumulate as we grow up in a society and that mediate the kind of understanding we can form or construct. [...]

...we use language to represent the world as it is disclosed by our particular scale and kind of organs of perception. In other words, our body is the most fundamental mediating tool that shapes our understanding. [...] The developments in language uses and their intellectual implications [...] are, then, always tied in some degree to this embodied core of understanding. [...] education, and cultural history, (are) processes in which we can lose more by way of alienation and emotional as well as intellectual desiccation, than we gain by way of understanding and aesthetic delight.” in *The Educated Mind: How Cognitive Tools Shape Our Understanding*, Kieran Egan, University of Chicago Press, 1997, pp. 4-8.

³⁸³ O *deslumbre*, atrás descrito, assenta num conceito mais lato e profundo, o de *Leveza* – uma das seis propostas de Italo Calvino para as narrativas deste novo milénio. Esta baseia-se numa certa visão e determinação, não num conceito vago. Como disse Paul Valéry, “deve-se ser leve como um pássaro e não como uma pena”:

O humor consubstancia-se na incongruência entre o esperado e o que realmente ocorre. O seu papel pode ser importante na preservação da atenção à narrativa. Mas mais difícil será utilizá-lo para suscitar um questionamento, que resulte no primeiro passo do raciocínio científico, atrás mencionado.³⁸⁴

O reconhecimento de padrões constitui uma capacidade natural, atestada por pesquisas e trabalhos científico-pedagógicos – nomeadamente os numéricos³⁸⁵. Os padrões possuem o poder de estimular os alunos, enquadrando os conceitos matemáticos. Podem ser utilizados na introdução, na clarificação de conceitos, como instrumento de questionamento, ou como dinamizador de *deslumbramento*.³⁸⁶

Considerem-se, então, os aspectos atrás descritos na elaboração de uma narrativa: argumento, conflito, imagens, humanidade, deslumbramento, humor e padronização. Podem ser elaborados dezasseis géneros de narrativas, quanto ao tema e quanto aos pontos de contacto com a matemática, como se apresenta na tabela seguinte:

	1 (A)	2 (A)	3(I)	4(I)
Geometria e Medida				

“No universo infinito da literatura abrem-se sempre outras vias a explorar, novíssimas ou antiquíssimas, estilos e formas que podem transformar a nossa imagem do mundo... Mas se a literatura não basta para me garantir que não ando só a perseguir sonhos, procuro na ciência alimento para as minhas visões em que se dissolve todo o peso... [...]...a literatura como função existencial, a procura da leveza como reacção ao peso de viver.” in *Seis Propostas para o Próximo Milénio*, Italo Calvino, Teorema, 1990, pp. 21-22, 42.

³⁸⁴ John Allen Paulos explicita como o humor subverte a lógica, suscitando novas regras, levando a uma reordenação do pensamento e estimulando, simultaneamente, uma atenção redobrada aos acontecimentos descritos. Seria, talvez, como se alguém se encontrasse prestes a cair num precipício e, com os seus sentidos despertos, conseguisse retomar o equilíbrio:

“Logic, pattern, rules, structure – all these are essential to both mathematics and humor, although of course the emphasis is different in the two. In humor, the logic is often inverted, patterns are distorted, rules are misunderstood, and structures are confused. Yet these transformations are not random and must still make sense on some level. Understanding the “correct” logic, pattern, rule, or structure is essential to understanding what is incongruous in a given story – to “getting the joke.” in *Mathematics and Humor*, John Allen Paulos, University of Chicago Press, 1980, p. 11.

³⁸⁵ Já foi demonstrado que as crianças conseguem distinguir diferentes números desde os quatro meses de idade (“Addition and subtraction by human infants”, K. Wynn, *Nature*, 358, 6389, 1992, pp. 749 – 750). Mesmo as crianças de rua, em diversas culturas, conseguem adquirir a matemática informal, aprendendo a contar e a reconhecer o dinheiro, na ausência de qualquer educação académica (“The development of mental addition as a function of schooling and culture”, H. P. Ginsburg, J. K. Posner e R. L. Russell, 1981, *Journal of Cross-Cultural Psychology*, 12, 2, 163 – 178).

³⁸⁶ Existem diversos níveis de realidade, na narrativa, onde podem ser introduzidos ou surgir padrões, subprodutos de uma história cultural. Calvino diz mesmo que “a literatura multiplica as densidades de uma realidade inesgotável de formas e de significados”. Compete ao autor determinar que padrões criar ou usar:

“A traditional storyteller’s craft is guided at all levels of composition by pre-existing cultural patterns... [...] At the lowest level, verbal *formulas* are very frequent (“once upon a time”); higher up, we find standard *motifs* (“the three brothers”). Higher still, scenes are structured by scenes types, and types become even more important at the level of stories. [...]... Vladimir Propp introduced the concept of story type... [...] Story type is a generic story with underlying rules and *constant* or *variant* elements. [...] Finally, the familiar notion of *genre* gives us a typology of stories at the macro level.” in *Circles Disturbed – the Interplay of Mathematics and Narrative*, orgs. Barry Mazur e Apostolos Doxiadis, Princeton University Press, 2012, pp. 292-293.

Álgebra e Funções				
Probabilidades e Estatística				
Números e Operações				

1, 2, 3 e 4 como definidos anteriormente.

A – narrativas que acompanham o conceito matemático.

I – narrativas que se interligam com o conceito matemático.

Considerem-se ainda seis passos no planeamento das narrativas:

Identificação do objectivo

Pode ser um fragmento de conteúdo curricular, como um conceito ou tópico específico; pode estar relacionado com uma fórmula, método ou estratégia particulares; pode ser um meta-conteúdo, como a aplicabilidade ou beleza de uma determinada ideia matemática.

Identificação do problema

Perceber que actividade matemática pode criar empatia entre o aluno e o conteúdo que se pretende transmitir. Perceber como se pode construir uma história em torno dessa actividade.

Identificação da história e dos instrumentos de suporte

Após a identificação da história, da sua estrutura genérica, torna-se necessário adorná-la com os elementos necessários a torná-la memorável, emocionalmente cativante, catalisadora da imaginação.

Apresentação oral de uma história

A importância de uma história para um aluno depende da forma como esta é apresentada. Constitui-se como essencial a interacção do aluno com a história, através da participação activa na sua construção.

Natureza da história

Para além de uma história poder constituir uma introdução de um conceito ou matéria, pode também possuir uma natureza que releve muito para além da sua momentânea relação com o conceito matemático, expressa na história. Essa relação cúmplice pode ser extrapolada para exercícios e problemas adjacentes, decorrentes ou simplesmente subjacentes à narrativa oral previamente construída.

Para além disso, não deve ser esquecido que se podem utilizar diversos géneros literários na construção das narrativas. Em 4.3 serão dados exemplos ilustrativos do que se acabou de conceptualizar.

4.2.2 Porquê contar uma história.

Existem duas diferenças fundamentais entre um conteúdo oralizado, contado a um grupo de ouvintes, e um texto escrito, que um leitor lê para si mesmo. Em primeiro lugar, ao tratar colectivamente desse conteúdo, facilita-se a formação de uma compreensão partilhada³⁸⁷, enquanto a leitura individual tende a separar os indivíduos. Em segundo lugar, uma história contada oralmente possui a natureza peculiar de ter, como meio de transmissão, a voz humana, que constitui um meio muito diferente da palavra escrita.³⁸⁸

Neste contexto, quatro questões centrais perfilam-se como determinantes na transmissão oral de qualquer conhecimento, em particular o matemático, explicitando a distinção entre a narração oral de um conceito e a construção oral em torno desse conceito.

Em primeiro lugar, quem faz uma construção oral, fá-lo de forma livre; quem oraliza um conceito escrito, encontra-se condicionado pelo texto.³⁸⁹

Em segundo lugar, o contador oral constitui parte integrante da narrativa; o narrador de um texto constitui um mensageiro, um arauto.³⁹⁰

³⁸⁷ A cultura de uma comunidade forma-se tendo em conta um conjunto de pressupostos que constituem a sua identidade. De certa forma, esse instinto comunitário produz, não só o efeito de formar um conhecimento comum, mas também os alicerces para um entendimento futuro:

“...a collective intersubjective consciousness...” in *Oral Storytelling and Teaching Mathematics – Pedagogical and Multicultural Perspectives*, Michael Stephen Schiro, Sage Publications, 2004, p. 55.

³⁸⁸ Todos os seres humanos iniciam a sua aprendizagem e intervenção no meio social em que se inserem através da voz, falando e escutando. Esta constitui o primeiro e mais elementar instrumento de comunicação e de socialização:

“As Marshall McLuhan has powerfully argued, “the medium is the message”, and the medium of the human voice is more personal, individual, and immediate.” in *Oral Storytelling and Teaching Mathematics – Pedagogical and Multicultural Perspectives*, Michael Stephen Schiro, Sage Publications, 2004, pp. 55-56.

³⁸⁹ Um contador de histórias usualmente utiliza mnemónicas ou esquemas mentais como linhas mestras para o seu enredo, alterando as palavras que não funcionam em termos narrativos e aperfeiçoando os momentos que se revelam determinantes no seu contar. Um leitor de histórias pode aperfeiçoar a dicção ou a entoação, mas diz as palavras que estão escritas:

“... the orally delivered story is different from the read book because the storyteller is free from any text. In contrast, the reader of a book is intellectually, visually, and physically tied to a book that is being read.” in *Oral Storytelling and Teaching Mathematics – Pedagogical and Multicultural Perspectives*, Michael Stephen Schiro, Sage Publications, 2004, p. 54.

³⁹⁰ Uma história escrita condiciona o leitor à mensagem que ele consegue extrair da escrita do autor. Se partilha a história que o autor quis contar, passa a constituir um instrumento de difusão, uma vez que não consegue acrescentar fundamentalmente mais nada, para além do que está nos símbolos. Um contador de histórias decide, tecnicamente, esteticamente e emocionalmente, o que a história será:

“...an oral story comes from within the storyteller and becomes intimately connected with the storyteller’s personal expression...[...].even though readers may add emotion to the words they are reading, they are sharing the message of another person (the author), who is not present.” in *Oral Storytelling and Teaching Mathematics – Pedagogical and Multicultural Perspectives*, Michael Stephen Schiro, Sage Publications, 2004, p. 54.

Em terceiro lugar, o contador oral pode adaptar o que pretende contar às idiossincrasias dos ouvintes, até mesmo incluindo-os como actores da história; tal não acontece com um reprodutor de histórias escritas.³⁹¹

Finalmente em quarto, relacionada com todas as questões anteriores, o contador oral tem a capacidade de adaptar a história às suas necessidades imediatas, quando a está a contar.³⁹²

4.2.3 Exemplos de narrativas que se interligam com os conceitos matemáticos.

Exemplo 1 – Geometria e Medida 4(I).

Objectivo: Compreender Desigualdade triangular e Teorema de Pitágoras.

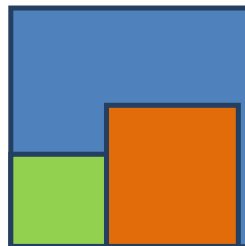
Problema: Elaborar construções geométricas que permitam visualizar o que se pretende transmitir.

Há muito tempo atrás viviam numa aldeia grega três homens: Papatudis, Pequenotis e Promontórius. Cada um deles possuía um terreno quadrado. Pequenotis, dono do terreno menor, era um homem baixo, de nariz batatudo e dentes de coelho. Promontórius tinha o terreno maior e era alto e magro como um caniço. Papatudis era barrigudo e tinha os olhos muito abertos, como duas luas cheias, possuindo o terreno sobranter. Um dia encontraram-se e Promontórius disse:

- O meu terreno é tão grande como os vossos dois terrenos juntos!

Ninguém sabia calcular as áreas dos terrenos. Mas os vizinhos não acreditavam em Promontórius:

- Se o lado do teu terreno fosse maior do que a soma dos lados dos nossos terrenos, isso poderia ser verdade. – disse Papatudis.



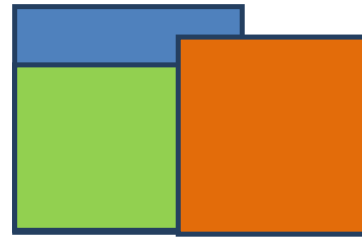
³⁹¹ A possibilidade de conseguir prender a atenção e manter o interesse dos ouvintes por um maior período de tempo, ao adaptar a narrativa aos seus gostos ou ao abrir portas à sua participação, reveste-se de particular importância no ensino. Torna-se muito mais difícil de realizar ao oralizar um texto que não foi elaborado para esse efeito:

“...the reader [...] must be true to the words within a written text – a text written by an author who is not capable of personally interacting with his or her audience and changing the text accordingly.” in *Oral Storytelling and Teaching Mathematics – Pedagogical and Multicultural Perspectives*, Michael Stephen Schiro, Sage Publications, 2004, p. 55.

³⁹² O contador de histórias tem a capacidade de, ao contar, esclarecer dúvidas ou clarificar determinados aspectos da narrativa no próprio momento em que surgem, algo que, quando feito por um leitor de um texto escrito, resulta numa interrupção (por vezes definitiva) da narrativa:

“...is a real advantage [...] for oral storytelling [...] to become a sufficiently accomplished and confident oral storyteller, able to spontaneously create and tell stories that fit a specific academic need...” in *Oral Storytelling and Teaching Mathematics – Pedagogical and Multicultural Perspectives*, Michael Stephen Schiro, Sage Publications, 2004, p. 55.

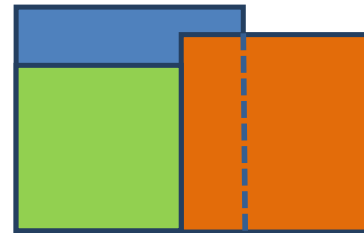
- Mas o lado do teu terreno é menor que a soma dos lados dos nossos terrenos! – exclamou Pequenotis.



- Isso não quer dizer nada! Ainda assim, o meu terreno pode ser maior que o vosso... - respondeu Promontórus.



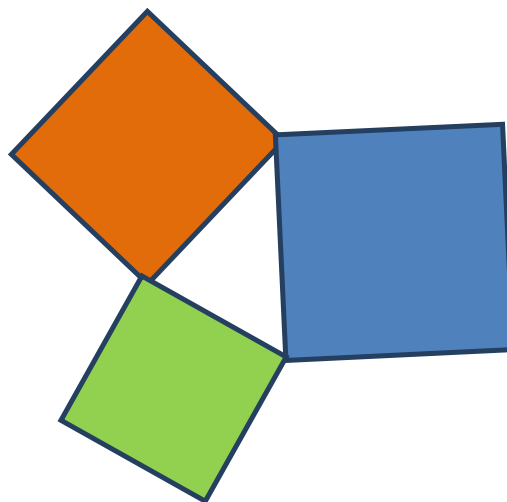
- Mas também pode ser menor! – retorquiu Papatudis.



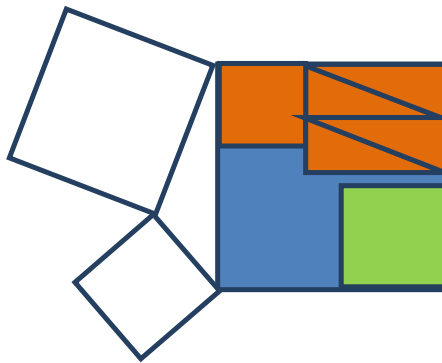
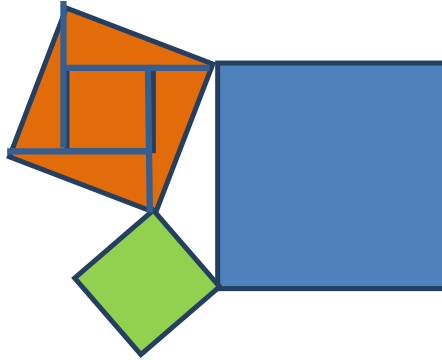
- Se provares o que dizes, dou-te metade do meu terreno! – exclamou Pequenotis, já irritado com a conversa.

Promontórus, que era inteligente e não gostava de ser tido por mentiroso, foi para casa pensar no assunto.

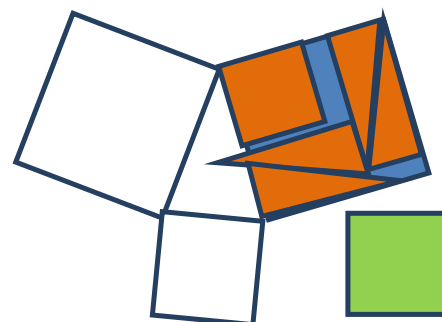
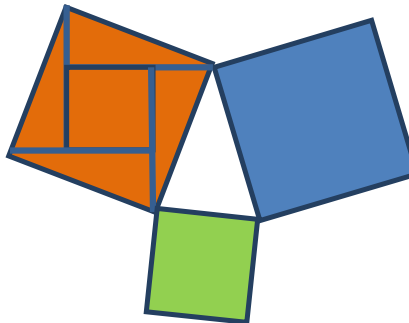
- Quer dizer que o lado do meu terreno é inferior à soma dos lados dos outros dois... Então os lados dos terrenos terão de formar necessariamente um triângulo... Como os três lados são diferentes, ele é um triângulo escaleno... - pensou Promontórus.



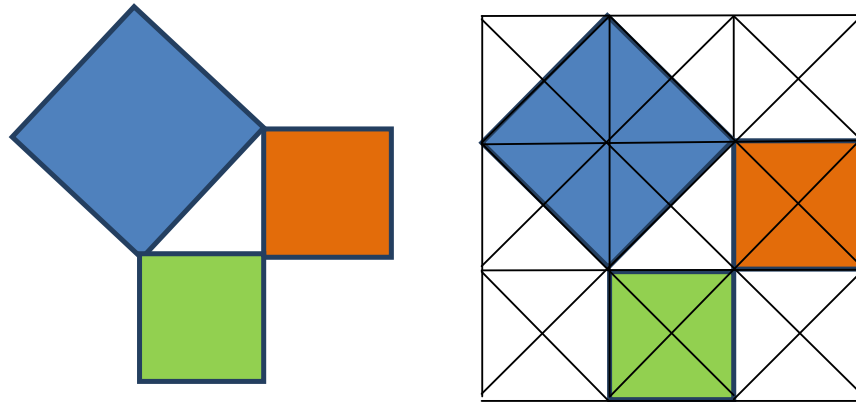
- Se esse triângulo escaleno tiver um ângulo obtuso, será que o que afirmei é verdadeiro? – pensou o homem. Resolveu experimentar:



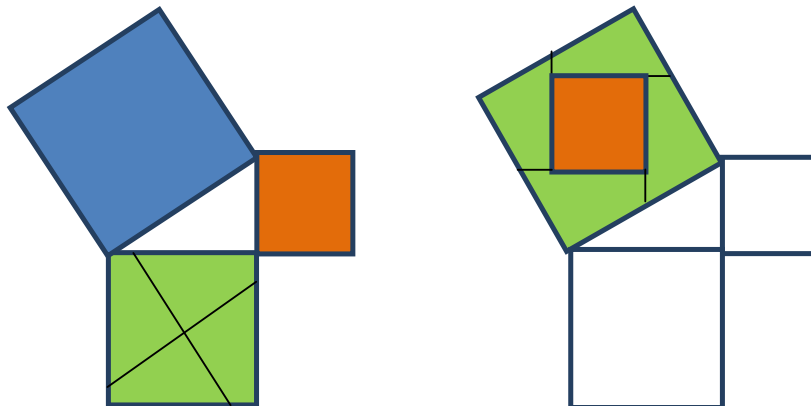
- Não, a área do meu terreno seria maior que a área dos terrenos dos meus vizinhos... Bem, já percebi que o triângulo não pode ser obtusângulo... E se tiver os três ângulos agudos?



- Bom, o meu terreno assim é menor que os dos meus vizinhos juntos... Se esse triângulo escaleno tiver um ângulo recto, será que o que afirmei é verdadeiro? – Pensou, entusiasmado, Promontóriu. Começou por observar o que acontecia quando os quadrados menores eram iguais:



Depois, acabou por encontrar uma forma de mostrar que também era verdade quando os quadrados menores eram diferentes:



- Os meus vizinhos não vão aceitar a minha justificação. Vão dizer que, não sendo um triângulo rectângulo, não é possível que os terrenos deles sejam do tamanho do meu... Bem, terei de garantir que os lados dos terrenos deles façam um triângulo rectângulo com o lado do meu terreno...

Promontóriu descobriu, depois de os medir, que o seu terreno tinha 5 metros de lado e os dos vizinhos 4 metros e 3 metros, respectivamente. Conseguiria obter um triângulo rectângulo e ganhar a aposta ao seu vizinho?

Exemplo 2: Probabilidade e Estatística 3(I)

Objectivo: Compreender relação entre Probabilidade e Frequência Relativa.

Problema: Colocar em evidência anomalias que quebram essa relação.

Os Moicabeça eram membros de uma tribo que vivia no meio da selva. Nessa tribo, acreditavam que existiam seis deuses: Metágua, deus da água; Arquetedeu, deus do ar; Jardeu, deus do fogo; Naocaias, deus das árvores; Naorrespires, deus dos peixes; Luzeu, deus do Sol.

Cada dia do ano era dedicado a um deus. De madrugada Mamadu, feiticeiro dos Moicabeça, pegava no seu dado – onde, em cada face, tinha gravado o símbolo de um dos deuses da tribo – e ia para Naosseca, o rio sagrado, lançar o dado, que decidia a que deus pertencia aquele dia. E assim foi, durante os 600 dias do ano – o ano, para os Moicabeça, tinha 600 dias.

No final desse ano, Mamadu andava preocupado, e foi falar com o Chefe da aldeia.

- Meu Chefe Bantuelele, estou preocupado! O deus Jardeu só teve 50 dias este ano... No próximo ano a selva vai queimar muito! – disse Mamadu ao seu Chefe.

- Amigo Mamadu, há algum deus com mais dias concedidos que os outros? – perguntou Bantuelele.

- Sim, Chefe Bantuelele, o deus Naocaias tem 148, os outros têm mais ou menos 100...

- Mamadu, tenho que pensar muito, depois falarei contigo... - concluiu Bantuelele.

Mamadu saiu e Bantuelele pensou, pensou, pensou, pensou... e descobriu. Mandou chamar Mamadu.

- Boa tarde, grande Chefe, já tem solução para o nosso problema? – questionou Mamadu.

- Olá, Mamadu. Tu estragaste o dado sagrado. Os deuses são amigos, não querem zangas entre eles. Tu não tiveste cuidado a lançar o dado e ele deixou de ser sagrado. Terás de fazer duas coisas: Este ano vais trocar a face do deus Naocaias, pela do deus Jardeu e vice-versa; no próximo ano, tens de construir um novo dado... Assim, este ano vais apaziguar os deuses e no ano seguinte tens mais cuidado a lançar o novo dado, está bem? – explicou Bantuelele.

- Sim, grande Chefe, obrigado. Vou caçar uma bonita jibóia para lhe oferecer. – disse, satisfeito, Mamadu.

Exemplo 3: Álgebra e funções 4(I)

Objectivo: Introdução ao estudo de funções.

Problema: Mostrar como alguém terá identificado correspondências unívocas.

O príncipe Djet adorava olhar o céu, namorar a Lua e contar as estrelas. Aliás, ele contava tudo o que encontrava: os feijões do prato, um punhado de grãos de areia, uma cáfila, os seus próprios dedos...

Mas o príncipe Djet tinha um problema: sempre que contava os dedos das mãos, enganava-se:

- Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, onze. Bolas, enganei-me outra vez!...

Isto preocupava-o terrivelmente, pois não queria enganar-se a contar a areia e as estrelas...

Um dia, ouviu falar de um grande sábio, Kmet, o velho, que vivia para lá das montanhas do arco-íris. Ele saberia, seguramente, o que fazer. O príncipe Djet mandou-o chamar:

- Bem-vindo sejas, venerável Kmet! Estou tristíssimo, pois engano-me constantemente ao contar os meus dedos! Poderás ajudar-me?

- Terei todo o prazer em ajudar-te...Sabes qual é o problema? Quando contas os dedos, estás a contar objectos que são muito parecidos. Porque não associas uma cor a cada dedo? Depois, contas as cores, e ficas a saber o número de dedos...

- Isso resultará se quiser contar grãos de areia ou estrelas do céu? Onde conseguirei tantas cores?...

- Bom, sugiro que escolhas dez cores e que as associes ao que queres contar, utilizando-as sempre pela mesma ordem; por exemplo, azul, verde, amarelo, preto, branco, encarnado, castanho, lilás, laranja, roxo, azul, verde, amarelo e assim por diante...

- Isso é fantástico! Assim não me tornarei a enganar nas contagens... Portanto se a cada objecto fizer corresponder algo completamente distinto do que associo aos outros objectos, não tornarei a fazer corresponder a cada dedo, grão de areia ou estrela do céu, mais do que um número. A primeira estrela que contei nunca poderá ser também a sétima, a vigésima ou a milésima!

- Isso mesmo, meu príncipe! Agora poderás contar tudo o que quiseres, sem receio de te enganares...

- Ótimo! Vou já começar a contar todas as pessoas que ouviram a nossa história...

Exemplo 4: Números e Operações 3(I)

Objectivo: Mostrar que a divisão por zero constitui uma operação indefinida.

Problema: Construir divisões sucessivas, aproximando o divisor de zero.

No Sião, os reis podiam ter esposas e concubinas, bem como muitos descendentes. Prajadhipok, conhecido por Rama VII, possuía quinze descendentes directos. No seu leito de morte, disse-lhes:

- Meus filhos, como sabem será vosso irmão Ananda Mahidol que subirá ao trono. No entanto, tenho quinze rubis, para distribuir por cada um de vós. Cada um tem o tamanho da palma da minha mão e não há rubis iguais no mundo.

Cinco irmãos encontraram-se mais tarde, noite cerrada:

- Não quero ficar só com um rubi, irmãos! Quando nosso pai morrer, matamos os nossos irmãos e ficamos com os rubis que lhes caberiam!

- Está combinado, Ananda! – disseram os outros quatro.

Inevitavelmente, o velho rei morreu. Fizeram-se homenagens sumptuosas e todas as cidades do reino vestiram-se de roxo. Uma semana após a sua morte, os irmãos juntaram-se. Dentro de uma garrafa, colocaram veneno:

- Meus irmãos, nosso pai deixou-nos uma garrafa de sato, para bebermos quando ele falecesse. Façamos um brinde à sua memória... - disse o mais velho.

Após o brinde, dez irmãos caíram, inanimados. Estavam mortos. Ficariam, assim, três rubis para cada irmão. Mas como a inveja e a ganância não têm limites, Ananda não tirava os rubis dos irmãos da ideia. Mandou chamar os dois mais novos, dos cinco sobreviventes, e disse-lhes:

- Queridos irmãos, contaram-me que na nascente do rio Mun, príncipe das duas cores, filho do rio Mekong, existe um tesouro imenso no fundo das suas águas... Se me estimam, encontrem-no, para que o nosso reino seja ainda mais grandioso.

Nesse rio viviam centenas de crocodilos vorazes que, logo que os dois irmãos se aventuraram nas suas águas, os devoraram agitadamente, sem que deles nada restasse.

Eram agora apenas três irmãos, mas Ananda olhava desanimado para os seus cinco rubis... Resolveu contratar um assassino para matar os seus dois irmãos. Abhisit Vejajiva era um homem rude, extremamente forte e um famoso assassino. Dizia-se que tinha conseguido matar dois homens que lhe fugiram, arrancando-os das mandíbulas do crocodilo, dentro do qual se haviam escondido. Abhisit Vejajiva exigiu a Ananda, agora rei, um dos rubis, para matar os seus irmãos. Ananda acedeu, mas não fazendo tensões de cumprir o contrato. Rapidamente se cumpriu o estabelecido e Ananda pensou:

- Finalmente todos os rubis são meus!

Mas Abhisit Vejajiva, ao descobrir a traição do rei, matou-o e morreu às mãos dos guardas reais. Quanto aos rubis, nunca se chegou a saber como foram divididos, pois não sobrou ninguém por quem dividir.

4.2.4 Aplicação em sala de aula.

Apesar de existirem variadíssimos exemplos de aplicação de histórias e construções narrativas no ensino da matemática³⁹³, considerou-se pertinente, ainda assim, realizar um pequeno estudo de caso, sem grande relevância estatística, mas que mostra, contudo, uma relação positiva entre esta metodologia e a aprendizagem dos conceitos matemáticos. Tendo em vista uma observação dessa relação, considerou-se a introdução ao estudo das Sequências do 7º ano do 3º Ciclo do Ensino Básico. Para tal, foi elaborada uma apresentação, consistindo esta numa história que evidencia as definições básicas das sequências³⁹⁴. Após a aplicação da mesma, os alunos responderam a um inquérito³⁹⁵, que tentou escarpelizar se estes consideravam que os conceitos tinham sido por si assimilados, mas também que relação possuíam com a Matemática e com as histórias. Uma semana após a

³⁹³ *Teaching Mathematics as Storytelling*, Rina Zazkis, Peter Liljedahl, Sense Publishers, 2009.

³⁹⁴ Anexo 1.

³⁹⁵ Anexo 2.

apresentação, realizaram uma ficha de avaliação³⁹⁶, na qual estavam incluídas questões que permitiram confirmar os resultados do inquérito. A aplicação foi realizada a 88 alunos, entre os 11 e os 13 anos. Teria sido possível realizar o estudo por género, mas foi considerado para além do âmbito desta tese.

Em primeiro lugar, uma narrativa ou história torna necessário um determinado grau de atenção e concentração. Mas também uma actividade abstracta como a matemática assim o exige, com o risco de nos perdermos no emaranhado de axiomas e proposições. Foi interessante notar como o número de respostas apresentadas pelos alunos na 9ª, 10ª e 12ª questões do inquérito se distribuem de uma forma quase igual na escala de valores:

		1	2	3	4
9.	Tens bons resultados a matemática?	2	11	39	36
10.	Tens hábitos de leitura?	3	15	37	33
12.	És atento e concentrado?	2	12	41	33

De certa forma não surpreende que assim seja, uma vez que existem estudos que verificaram um melhor desempenho em matemática em crianças que lidaram com histórias desde tenra infância. Estes estudos mostram que o exercício de identificar padrões de comportamento, de relações entre personagens, de semelhanças e diferenças entre cenários, contribui para uma melhor compreensão e identificação de propriedades matemáticas³⁹⁷. Por outro lado, o acompanhar de regras e padrões narrativos e matemáticos exigem a aprendizagem simultânea de um maior grau de atenção e concentração³⁹⁸.

Também se nota uma muito maior atractividade das histórias, junto dos alunos, em comparação com a matemática:

		1	2	3	4
8.	Gostas de matemática?	1	19	41	27
11.	Gostas de lendas e outras histórias?	1	4	34	49

³⁹⁶ Anexo 3.

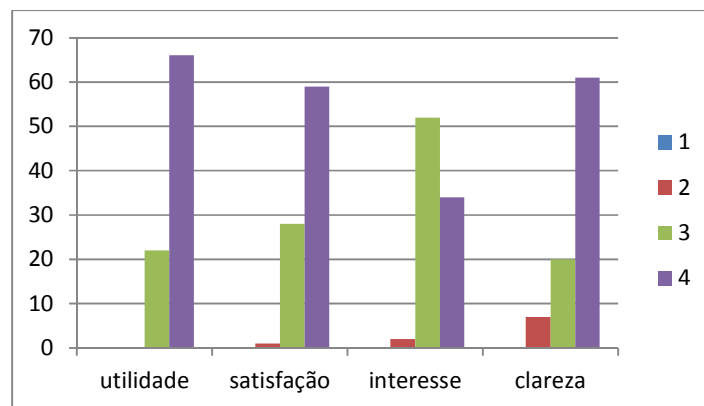
³⁹⁷ “We conclude by returning to discuss briefly what we consider to be the most intriguing finding of this study: that there may exist a relation between early preschool narrative abilities – in particular, in our study, the ability to relate the main events of the story through use of conjunctions, to convey the main events of the story, to shift between the actions and perspectives of characters, and to talk about the mental states of characters in the story – and later mathematical achievement.” in “Preschool children’s narratives and performance on the Peabody Individualized Achievement Test – Revised: Evidence of a relation between early narrative and later mathematical ability”, Daniela O’Neill, Michelle Pearce, Jennifer Pick, *First Language*, Vol 24(2), Sage Publications, 2004, p. 177.

³⁹⁸ “Esta educação é dialética. A literatura faz de nós melhores observadores da vida; e permite-nos exercitar o dom na própria vida; que por sua vez nos torna mais atentos ao detalhe na literatura; que por sua vez nos torna mais atentos ao detalhe na vida. E assim sucessivamente.” in *A Mecânica da Ficção*, James Wood, trad. Rogério Casanova, Quetzal, 2008, pág. 82.

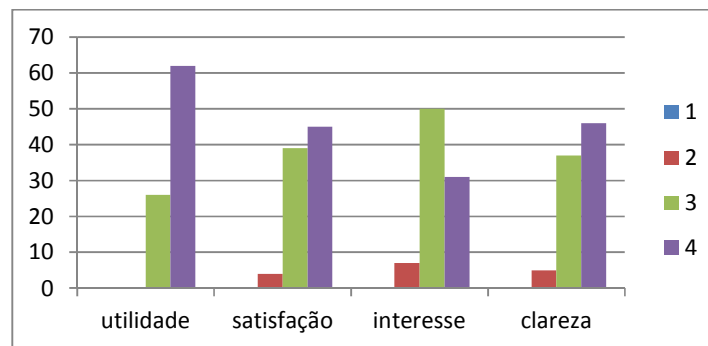
Parece evidente que tal constatação resulta de uma identificação entre as vivências do leitor e do ouvinte com diferentes narrativas, que contrasta com a forma neutra como se apresenta o conhecimento matemático. Uma dialoga com os homens, interrogando e ajudando a responder às suas dúvidas e angústias. A outra manifesta-se – ou assim a apresentam – como algo que apenas exige atenção, sem prometer nada em troca. Como radica no permanente estado inacabado do homem a essência da educação, o que se revela distante e impositivo não suscita proximidade e interesse, em geral.³⁹⁹

Relativamente às diferenças entre as aulas habituais e esta aula, foi interessante constatar que os alunos a consideraram mais satisfatória, de maior interesse e, acima de tudo, mais clara que uma aula habitual. Este facto, como parece óbvio, pode resultar de outros factores, como eventuais dificuldades do professor em ser explícito, quando transmite os conteúdos recorrendo à sua expressão formal, ou pelo simples facto de ser novidade esta forma de os transmitir. Não deixa de se apresentar, no entanto, à luz destes resultados, uma metodologia a ser estudada e equacionada de uma forma mais profunda e sustentada.

A aula de matemática foi:



As aulas habituais são:



³⁹⁹ “A educação é possível para o homem, porque este é inacabado e sabe-se inacabado. [...] O homem deve ser o sujeito de sua própria educação. Não pode ser o objecto dela. Por isso ninguém educa ninguém.” in *Educação e Cidadania*, Paulo Freire, Edições Paz e Terra, 1979, pp. 27-28.

Do ponto de vista da aprendizagem do conhecimento, a esmagadora maioria dos alunos compreendeu o que constitui uma sequência. Para isso, considerou-se a questão 2.1 da ficha de avaliação, que pretende que reconheçam uma sequência numa situação quotidiana como forma de avaliar se os alunos tinham entendido o conceito de sequência, o que foi feito com sucesso pelos alunos:

1- Compreendeste o que é uma sequência de números?

	1	2	3	4
opinião	0	0	14	74
2.1	3	0	11	72

Por outro lado, a compreensão do que constitui a ordem e o termo de uma sequência foi avaliada nas questões 2.2 e 2.3, com resultados igualmente bons:

2- Compreendeste o que é a ordem de uma sequência de números

	1	2	3	4
opinião	0	1	23	64
2.3	9	1	22	54

3- Compreendeste o que é um termo de uma sequência de números

	1	2	3	4
opinião	0	2	11	75
2.2	3	0	24	61

Os resultados dos alunos são um pouco diferentes das respostas fornecidas no inquérito, pois estes não compreenderam o significado da palavra recorrência. Apesar de ter sido explicado na aula da apresentação, o inquérito só foi aplicado no dia seguinte ou dois dias depois, o que levou a esse problema de interpretação. No entanto, os resultados mostram que os alunos compreenderam de forma bastante satisfatória o conceito.

4- Compreendeste o que é a recorrência de uma sequência de números

	1	2	3	4
opinião	1	16	40	32
resultado	3	22	7	56

Na compreensão da existência de uma regra inerente a cada sequência e da sua unicidade, nota-se que, apesar das dúvidas que os alunos apresentam na resposta ao inquérito, demonstram conhecimento dessa regra nos resultados da questão aula.

5- Compreendeste que uma sequência tem uma regra própria

	1	2	3	4
opinião	1	2	25	60
resultado	1	2	5	80

6- Compreendeste que cada sequência tem uma regra própria

	1	2	3	4
opinião	1	1	25	61
resultado	0	6	5	77

Em conclusão, os resultados mostram que a aplicação foi bem-sucedida e que correspondeu à expectativa nela depositada.

Epílogo

A rede de pesca serve para apanhar peixes.
Apanha o peixe e esquece a rede.
O laço serve para apanhar coelhos.
Apanha o coelho e esquece o laço.
As palavras servem para transmitir ideias.
Pega nas ideias e esquece as palavras.

Chuang Tsé⁴⁰⁰

Com esta tese pretendeu-se analisar o problema comunicacional da Matemática, nas suas diferentes vertentes, enfatizando a importância da utilização da narrativa como instrumento de transmissão do conhecimento matemático, nomeadamente na sua comunicação oral. No entanto, essas construções narrativas apresentam uma importância que vai para além do mero utilitário pedagógico: por um lado, leva à assimilação de conceitos de forma interactiva, obrigando a um tipo de raciocínio lógico muito diferente dos enunciados dos livros de texto; por outro lado, podem ajudar a construir uma humanidade menos tendente à tomada de decisões irracionais, à indecisão prolongada na resolução dos seus problemas, ou até à barbárie a que por vezes se assiste, se conseguirem contribuir para aumentar o número de pessoas que consegue estabelecer um nível de contacto mais profundo com as ideias matemáticas. A introdução de uma narrativa matemática, significativa e coerente, na narrativa que constitui a vida de cada indivíduo, reveste-se de particular importância, na medida em que saber Matemática implica necessariamente, sob este ponto de vista, ser Matemática. E quanto mais a Matemática for parte do nosso ser, maior será a capacidade humana de rigor e método, na resolução de problemas individuais e colectivos. Porque conhecer não é saber:

A transmissão de conhecimentos através da educação sempre teve dois objectivos: por um lado, dar a quem os recebe instrumentos de trabalho prático; pelo outro lado, dar-lhes uma coisa muito mais vaga, a que poderemos chamar sabedoria. A ênfase no primeiro aspecto tem-se tornado muito maior do que costumava ser e vai ameaçando cada vez mais expulsar do ensino a parte destinada à sabedoria.⁴⁰¹

Mas não é menos verdade que, considerada a matemática como um todo em evolução, lhe desaparece inteiramente o carácter de domínio fechado e bastando-se a si próprias e, pelo contrário, se descortinam bem claramente as ligações àquele

⁴⁰⁰ Filósofo e suposto poeta taoísta chinês do século IV a.C.. O seu nome significa literalmente "Mestre Zhuang" e é usado também referindo-se a uma colectânea de textos supostamente seus, que incluem prosa e poesia. A sua filosofia foi muito influente no desenvolvimento do budismo zen, que incorporou alguns dos seus ensinamentos.

⁴⁰¹ *Realidade e Ficção*, Bertrand Russell, trad. António Pedro Neves, Publicações Europa-América, 1965, p.166.

conjunto comum de preocupações, problemas e realizações que determinam, em última análise, a marcha do pensamento e da civilização.⁴⁰²

A perspectiva do ensino que se centra na classificação e delimitação das disciplinas, sem a essencial noção da sua interligação, interdependência e intercomunicação, carece de uma reformulação, na medida em que as diferenças claras que existiram - muitas vezes mais por necessidade dos homens, do que por concreta distinção – têm-se esbatido. Teoria e Prática, Ciência e Técnica, ou o movimento cumulativo de Biomatemática, Geofísica, Bioquímica, etc., são sinais de que uma mudança se torna necessária na forma como se define, se ensina e se aprende o conhecimento. Este tem que suscitar interrogações, construções mentais que tentem modelar os problemas e, acima de tudo, afastem a noção de acabado quando se obtém uma solução, despertando novas interrogações, novas modelações, novas soluções, numa sequência de narrativas-problema, que conduza a maioria dos homens à sua grande narrativa intelectual.

“...o que o mundo for amanhã é o esforço de todos nós que o determinará. Há que resolver os problemas que estão postos à nossa geração e essa resolução não a poderemos fazer sem que, por um prévio esforço do pensamento, procuremos saber, por uma análise fria e raciocinada, quais são esses problemas, quais as soluções que importa dar-lhes – saber donde vimos, onde estamos, para onde vamos.”⁴⁰³

Porque esse parece ser o desígnio dos homens, havendo muitos – demasiados – neste mundo, que nunca o descobrirão.

“...as ilusões nunca são perdidas. Elas significam o que há de melhor na vida dos homens e dos povos. Perdidos são os cépticos que escondem, sob uma ironia fácil, a sua impotência para compreender e agir; perdidos são aqueles períodos da história em que os melhores, gastos e cansados, se retiram da luta, sem enxergarem no horizonte nada a que se entreguem, caída uma sombra uniforme sobre o pântano estéril da vida sem formas (...) Benditas as ilusões, a adesão firme e total a qualquer coisa de grande, que nos ultrapassa e nos requer. Sem ilusão, nada de sublime teria sido realizado, nem a catedral de Estrasburgo, nem as sinfonias de Beethoven. Nem a obra imortal de Galileu.”⁴⁰⁴

Parece tudo muito certo mas, citando outro filósofo oriental, “todas as grandes caminhadas começam com um primeiro passo”⁴⁰⁵. E a tradição de considerar o ensino, ao nível universitário, uma actividade menor dos académicos, tem como consequência uma reprodutividade, noutros níveis de ensino ou de actividade, de um formalismo excessivo, contraproducente e ineficaz, e uma falta de

⁴⁰² *Conferências e Outros Escritos*, Bento de Jesus Caraça, Editora Gradiva, 1970, p.349.

⁴⁰³ *Conferências e Outros Escritos*, Bento de Jesus Caraça, Editora Gradiva, 1970, pp. 57-58.

⁴⁰⁴ *Conferências e Outros Escritos*, Bento de Jesus Caraça, Editora Gradiva, 1970, p. 56.

⁴⁰⁵ Lao Tsé (séc. IV a.C.).

cuidado na comunicação pessoal em contexto profissional, que gera equívocos e ineficiências sistêmicas.

...I am a traditionalist [...]...the greatest achievement of twentieth-century mathematics is that we have (to the extent possible) fulfilled the Hilbert/Bourbaki program of putting everything on a rigorous footing; we have axiomatized our subject; we have precise definitions of everything. The bad news is that these accomplishments have shaped our world view, all the way down into the calculus classroom. [...] Teaching is an important part of what we do. [...] We simply cannot get away with the carelessness that was our hallmark in the past. [...] Teaching is a regimen that we spend our entire lives learning and revising and honing to a sharp skill.⁴⁰⁶

A importância da narrativa e da oralidade na constituição da identidade humana, bem como a diversidade cultural que se espalha, com o advento da globalização, criam a necessidade de uma multiplicidade de perspectivas, de pedagogias, de narrativas, de vozes, sem que as ideias matemáticas se tornem menos rigorosas.

“I have proposed that the methodology of logical demonstration, or proof, [...] resulted from the gradual transformation and convergence of various evolving practices, at the heart of which are the cognitive capacities of narrative and the cultural tools of poetry.”⁴⁰⁷

Se a citação anterior constitui uma afirmação verdadeira, então parece possível uma desconstrução da expressão formal em narrativas que permitam clarificar os conceitos matemáticos que lhe estão subjacentes. Isso exige um ensino interdisciplinar, com processos avaliativos multidisciplinares, que fomentem a curiosidade, o espírito crítico, o estabelecer de ligações afectivas com o conhecimento e uma visão não dogmática, como motores da formação integral dos indivíduos e das suas aprendizagens, ao longo da sua vida.

A utilização em sala de aula da narrativa oral, como forma de transmitir o conceito de sequência e algumas das suas propriedades, foi muito bem aceite pelos alunos. Em primeiro lugar, suscitou mais atenção da sua parte. Todos os alunos compreenderam a história e sentiram curiosidade de saber como terminaria. O aspecto, o nome e a inteligência da personagem contribuíram para que estivessem concentrados no que ela propunha. Tentavam eles próprios adivinhar o que iria fazer de seguida e como o faria. Avançavam propostas sobre como e o que seria. Isto levou a que os conceitos não fossem esquecidos, o que provavelmente aconteceria em muitas cabeças se a matéria lhes tivesse sido apresentada de forma abstracta. Conclui-se, então, que a narrativa concretiza os processos

⁴⁰⁶ *How to teach Mathematics*, Steven G. Krantz, American Mathematical Society, 1998, p. xi-xvii.

⁴⁰⁷ “A streetcar named proof”, Apostolos Doxiadis, *Circles Disturbed – The Interplay of Mathematics and Narrative*, Apostolos Doxiadis, Barry Mazur (eds.), Princeton University Press, 2012, p. 373.

abstractos, ajudando os alunos a compreender e assimilar os conceitos. Poderá assim ser um auxiliar fundamental e uma prática a implementar de forma generalizada nos próximos anos.

Existirá uma utilização futura das narrativas construídas no âmbito desta tese: uma que poderá ser introdutória do teorema de Pitágoras; a outra, exemplificativa da relação entre frequência relativa e probabilidade; a última, uma forma anedótica de introduzir as funções racionais, em particular o facto de não poderem ter denominador nulo. Outras, com certeza se seguirão.

Uma proposta, a realizar, seria uma obra de contos elaborados por autores lusófonos sobre diferentes ideias matemáticas; Também a dramatização desses contos seria interessante (já existe uma companhia de teatro que se dedica especificamente a levar à cena dramaturgia sobre matemática). Elaborar contos específicos para introduzir ou problematizar determinados conteúdos (contos mais ou menos interactivos, conforme o grau de compreensão ou de participação dos alunos – neste caso, já foram encetados contactos com colegas) ou tertúlias matemático-literárias (para alunos ou para professores) poderiam ser outras propostas.

O objectivo primordial consiste, assim, em tornar nítida a diferença e relação entre a Substância e a Forma Matemática, em muitos aspectos da comunicação matemática, de maneira a que cada indivíduo que lida com esse conhecimento não seja um mero retransmissor, incapaz de o transformar e reutilizar, de acordo com as suas necessidades; parece essencial que as ideias matemáticas sejam tão moldadas como a água, livres de um excesso de solidificação formal, prontas para, com todo o peso e densidade que possuem, se tornarem, nas nossas mãos, literatura leve e saciante.

...a literatura como função existencial, a procura da leveza como reacção ao peso de viver. [...] Creio que é uma constante antropológica este nexos entre a levitação desejada e a privação sofrida.⁴⁰⁸

Para que quem quer ensinar e para que quem quer aprender consiga realizar uma permanente invenção do projecto de si próprio, de forma mais rigorosa.

⁴⁰⁸ *Seis Propostas Para o Próximo Milénio*, Italo Calvino, trad. José Colaço Barreiros, Editorial Teorema, 1998, pág. 42.

Bibliografia

Matemática

- Balaguer, Mark**, *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, Oxford University Press, 1998.
- Boyer, Carl B., Merzbach, Uta C.**, *A History of Mathematics*, Wiley and Sons, 1991.
- Caraça, Bento de Jesus**, *Conceitos Fundamentais da Matemática*, Livraria Sá da Costa Editora, 1984.
- Gleick, James**, *Caos – a construção de uma nova ciência*, trad. José Carlos Fernandes e Luís Carvalho Rodrigues, Editora Gradiva, 1994.
- Dieudonné, Jean**, *A Formação da Matemática Contemporânea*, trad. J.H. von Hafe Perez, Publicações D. Quixote, 1990.
- Estrada, Maria Fernanda, Sá, Carlos Correia de, Queiró, João Filipe, Silva, Maria do Céu, Costa, Maria José**, *História da Matemática*, Universidade Aberta, 2000.
- Gillies, D.**, *Revolutions in Mathematics*, Clarendon Press, 1992.
- Grattan-Guinness, Ivor**, *The Fontana History of the Mathematical Sciences*, Fontana Press, 1997.
- Grosholtz, E., Bregger, H.**, *The Growth of Mathematical Knowledge*, Kluwer, 2000.
- Guillen, Michael**, *Pontes Para o Infinito*, trad. Jorge da Silva Branco, Editora Gradiva, 1987.
- Hardy, G. H.**, *Apologia de um Matemático*, trad. Daniela Kato, Editora Gradiva, 2007.
- Katz, V.J.**, *History of Mathematics – an introduction*, Harper Collins Publisher, 1993.
- Klein, Morris**, *Mathematics and the search for Knowledge*, Oxford University Press, 1985.
- Klein, Morris**, *Mathematics, The loss of Certainty*, Oxford University Press, 1980.
- Kvasz, Ladislav**, *Patterns of Change, Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics*, Birkhauser, 2008.
- Maor, Eli**, *To Infinity and Beyond – A Cultural History of the Infinite*, Princeton University Press, 1987.
- Paulos, John Allen**, *Mathematics and Humor*, University of Chicago Press, 1980.
- Ruelle, David**, *O Cérebro do Matemático*, trad. Edgar Rocha, Gradiva, 2007.
- Schirn, M.**, *The Philosophy of Mathematics Today*, Clarendon Press, 1998.

Serres, Michel, *As Origens da Geometria*, trad. Ana Simões e Maria da Graça Pinhão, Terramar Editores, 1997.

Shapiro, Stewart (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, ed. Oxford University Press, 2005.

Simmons, George F., *Cálculo com Geometria Analítica*, trad. Seiji Hariki, Macgraw-Hill, 1996.

Stewart, Ian, *Os Problemas da Matemática*, trad. Miguel Urbano, Editora Gradiva, 1996.

Tasic, Vladimir, *Mathematics and the Roots of Postmodern Thought*, Oxford University Press, 2001.

Weyl, Hermann, *Symmetry*, Princeton University Press, 1952.

Wittgenstein, Ludwig, *Remarks on the Foundations of Mathematics*, eds. G. H. von Wright, R. Rhees, G. E. M. Anscombe, MIT Press, 1956.

Narratividade

Barthes, Roland, *O Prazer do Texto*, trad. Maria Margarida Barahona, Edições 70, 1997.

Barthes, Roland, *O Rumor da Língua*, trad. António Gonçalves, Edições 70, 1987.

Barthes, Roland, *Ensaio Críticos*, trad. António Massano e Isabel Pascoal, Edições 70, 1977.

Bloch, William Goldbloom, *The Unimaginable Mathematics of Borges' Library of Babel*, Oxford University Press, 2008.

Calvino, Italo, *Seis Propostas Para o Próximo Milénio*, trad. José Colaço Barreiros, Editorial Teorema, 1998.

Calvino, Italo, *Ponto Final – Escritos sobre Literatura e Sociedade*, trad. José Colaço Barreiros, Editorial Teorema, 2003.

Calvino, Italo, *Porquê Ler os Clássicos*, trad. José Colaço Barreiros, Editorial Teorema, 1994.

Calvino, Italo, *Sobre o Conto de Fadas*, trad. José Colaço Barreiros, Editorial Teorema, 1999.

Doxiadis, Apostolos, Mazur, Barry, (eds.), *Circles Disturbed – The Interplay of Mathematics and Narrative*, Princeton University Press, 2012.

Eco, Umberto, *Leitura do Texto Literário*, trad. Mário Brito, Editorial Presença, 1993.

Eco, Umberto, *Obra Aberta*, trad. João Rodrigo Narciso Furtado, Editorial Presença, 1989.

- Eco, Umberto**, *O Signo*, trad. Maria de Fátima Marinho, Editorial Presença, 1997.
- Fisher, Barbara**, *Noble Numbers, Subtle Words – The Art of Mathematics in the Science of Storytelling*, Associated University Presses, 1997.
- Foucault, Michel**, *O que é um autor?*, trad. António Fernando Cascais e Eduardo Cordeiro, Edições Vega, 2000.
- Labov, William**, *Language in the Inner City*, University of Pennsylvania Press, 1972.
- Langacker, Ronald W.**, *Foundations of Cognitive Grammar*, vol. 1, Stanford University Press, 1987.
- Ong, Walter**, *Orality and Literacy: The Technologizing of the World*, New Accents, 1982.
- Propp, Vladimir**, *A Morfologia do Conto*, trad. Jaime Ferreira e Vítor Oliveira, Vega Editora, 2003.
- Ricoeur, Paul**, *Teoria da Interpretação – O Discurso e o Excesso de Significação*, trad. Artur Morão, Lisboa, Edições 70, 1976.
- Wood, James**, *A Mecânica da Ficção*, Quetzal, 2008.

Pedagogia

- Abrantes, Paulo**, (coord.), *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais*, Ministério da Educação – Departamento do Ensino Básico, 2001.
- Albuquerque, Luís**, *Notas para a História do Ensino em Portugal*, Textos Vértice, 1º Vol., 1960.
- Carvalho, Rómulo de**, *O Ensino da Matemática em Portugal: desde a fundação da nacionalidade até ao fim do regime de Salazar-Caetano*, Fundação Calouste Gulbenkian, 1986.
- Chaitin, Gregory J.**, *Conversas com um matemático*, trad. Leonor Moreira, Editora Gradiva, 2003.
- Crato, Nuno** (coord.), *Desastre no Ensino da Matemática: Como Recuperar o Tempo Perdido*, Gradiva, 2006.
- Egan, Kieran**, *The Educated Mind: How Cognitive Tools Shape Our Understanding*, University of Chicago Press, 1997.
- Freire, Paulo**, *Pedagogia do Oprimido*, Paz e Terra, 1970.
- Freire, Paulo**, *Educação e Mudança*, Paz e Terra, 1979.
- Krantz, Steven G.**, *How to Teach Mathematics*, American Mathematical Society, 1999.
- Lima, Elon Lages**, *Matemática e Ensino*, Gradiva, 2004.

Maia, Jorge, Castro, Joana, *A divergência entre a avaliação contínua e os exames nacionais de Matemática - 1993-1994*, Instituto de Inovação Educacional, 1996.

Paulos, John Allen, *Innumeracy – Mathematical Illiteracy and its Consequences*, Hill and Wang, 1989.

Paulos, John Allen, *Beyond Numeracy*, Vintage Books, 1991.

Paulos, John Allen, *Once Upon a Number – the Hidden Mathematical Logic of Stories*, Basic Books, 1998.

Polya, G., *Como Resolver Problemas*, trad. Leonor Moreira, Gradiva, 2003.

Russell, Bertrand, *On Education*, Routledge, 2010 (1ª ed. 1926, George Allen & Unwin).

Schiro, Michael Stephen, *Oral Storytelling and Teaching Mathematics – Pedagogical and Multicultural Perspectives*, Sage Publications, 2004.

Stewart, Ian, *Cartas a Uma Jovem Matemática*, trad. Pedro Ferreira, Relógio D'Água Editores, 2006.

Tahan, Malba, *O Homem que Sabia Contar*, v. port. Maria das Mercês Peixoto, Editorial Presença, 2001.

Zazkis, R. & Liljedahl, P., *Teaching mathematics as storytelling*, Sense publishers, 2009.

Zazkis, Rina, Leikin, Roza, *Learning Through Teaching Mathematics*, Springer, 2010.

Outros

Abbott, Edwin A., *Flatland – O País Plano*, trad. M. Luísa Mascarenhas e L. Trabucho de Campos, Editora Gradiva, 1993.

Audi, Robert, *The Cambridge Dictionary of Philosophy*, Cambridge University Press, 1995.

Berlin, Isaiah, *The Roots of Romanticism*, Princeton University Press, 1999.

Bergson, Henri, *Time and Free Will – An Essay on the Immediate Data of Consciousness*, Riverside Press, 1950.

Borges, Jorge Luís, *Borges Oral*, Vega, 1978.

Borges, Jorge Luís, *Ficções*, trad. José Colaço Barreiros, Teorema, 1998.

Brower, Jan, *Intuitionism and Formalism*, Bernacerraf and Putnam, 1964.

- Cabral, João de Pina, Schmidt, Luísa** (orgs.), *Ciência e Cidadania – Homenagem a Bento de Jesus Caraça*, Imprensa de Ciências Sociais, 2008.
- Calvino, Italo**, *O Castelo dos Destinos Cruzados*, trad. José Colaço Barreiros, Editorial Teorema, 2003.
- Calvino, Italo**, *Fábulas e Contos*, 3 volumes, Gradiva, 2000.
- Calvino, Italo**, *The Uses of Literature*, Harcourt Brace and Company, 1986.
- Calvino, Italo**, *Novas Cósmicómicas*, Editorial Teorema, 1995.
- Calvino, Italo**, *Palomar*, trad. João Reis, Teorema, 1985.
- Caraça, Bento de Jesus**, *Conferências e Outros Escritos*, Editora Gradiva, 1970.
- Carroll, Lewis**, *The Annotated Alice*, introdução e notas de Martin Gardner, W.W. Norton & Company, 2000.
- Dolezel, Lubomir**, *Heterocosmica: Fiction and Possible Words*, John Hopkins University Press, 1998.
- Dostoievski, Fiodor**, *O Jogador e Outras Obras*, trad. Maria Franco, Estúdios Cor, 1965.
- Doxiadis, Apostolos**, *O Tio Petros e a Conjectura de Goldbach*, trad. Isabel Veríssimo, Publicações Europa-América, 2001.
- Enzensberger, Hans Magnus**, *O Diabo dos Números*, trad. Fátima Freire de Andrade, Edições Asa, 1998.
- Fichte, Johann Gottlieb**, *The Science of Knowledge*, J.B. Lippincott & Co., 1868, University Microfilms International, 1981.
- Finocchiaro, Maurice A.**, (ed. e trad.), *The Essential Galileo*, Hackett Publishing Company, 2008.
- Freudenthal, Hans**, (ed.), *The Concept and Role of the Model in Mathematics and Natural and Social Sciences*, Springer, 1961.
- Galison, Peter, Stump, David**, (orgs.), *The Desunity of Science: Boundaries, Contexts and Power*, Stanford University Press, 1996.
- Galison, Peter**, *Image and Logic – A Material Culture of Microphysics*, The University of Chicago Press, 2004.
- Hilger, Adam**, *Tributes to Paul Dirac*, J.H. Taylor – Bristol I.O.P. Publishing, 1987.

Hintikka, Jaakko, *Socratic Epistemology: Explorations of Knowledge-Seeking by Questioning*, Cambridge University Press, 2007.

Huber, Michael, *Mythematics*, Princeton University Press, 2009.

Lem, Stanislaw, *A Perfect Vacuum*, First Harvest/HBJ edition, 1983.

Lesh, Richard, Doerr, Helen M., (eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching*, Routledge, 2003.

Lyotard, Jean-François, *A Condição Pós-Moderna*, trad. José Navarro, Lisboa, Editora Gradiva, 2003.

Malraux, André, *O Museu Imaginário*, trad. Isabel Saint-Aubyn, Lisboa, Edições 70, 2011.

Martínez, Guillermo, *Borges e a Matemática*, trad. Miguel Serras Pereira, Ambar, 2003.

Neisser, Ulric, *Cognition and reality: Principles and implications of cognitive psychology*, W. H. Freeman, 1976.

Nunes dos Santos, A.M., Aurette, Christopher, (orgs.), *Uma Tarde com o Sr. Feynman*, Gradiva, 1991.

Olby, R. C. Cantor, G. N. Christie, J. R. R., Hodge, M.J.S., *Companion to the History of Modern Science*, Routledge, 1990.

Orsini, Gian N. G., *Benedetto Croce: Philosopher of Art and Literary Critic*, Southern Illinois University Press, 1961.

Ortega y Gasset, *A Rebelião das Massas*, Relógio D'Água, s/d.

Pappas, Theoni, *Fascínios da Matemática*, Replicação, 1995.

Pessoa, Fernando, *A Procura da Verdade Oculta – Textos Filosóficos e Esotéricos*, António Quadros (org.), Publicações Europa-América, 1989.

Peterfreund, Stuart, (ed.), *Literature and Science – Theory and Practice*, Northeastern University Press, 1990.

Platão, *Fedro*, trad. José Ribeiro Ferreira, Lisboa, Edições 70, 1997.

Poincaré, Henri, *Science et Méthode*, Flammarion, 1908.

Queneau, Raymond, *Cent Mille Millions de Poèmes*, Gallimard, 1961.

Rattansi, P., *Newton und die Weisheit der Alten*, Fauvel, 1993.

Rescher, Nicholas, *Complexity*, Transaction Publishers, 1998.

Russell, Bertrand, *Realidade e Ficção*, Publicações Europa-América, 1965.

Serres, Michel, *O Nascimento da Física no Texto de Lucrecio*, trad. Péricles Trevisan, Editora Unesp, 1997.

Steiner, George, *O Castelo do Barba Azul*, Relógio D'Água, 1992.

Vilaça, Alberto, *Bento de Jesus Caraça – Militante Integral do Ser Humano*, Campo de Letras, 2000.

Wittgenstein, Ludwig, *Philosophical Investigations*, trad. G. E. M. Anscombe, Basil Blackwell (ed.), 1953.

Sem Autor, *Gazeta de Matemática – Lista de autores e artigos, por fascículo*, Sociedade Portuguesa de Matemática, 1989.

Artigos

Brouwer, Luitzen Egbertus Jan, “Life, Art and Mysticism”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, volume 37, número 3, p. 394, 1996.

Castelnuovo, Guido, “La scuola nei suoi rapporti colla vita e colla scienza moderna”, Acta do III Congresso da Mathesis, 1912.

<<http://www.euclide-scuola.org/files/N.%20081%20Articoli%20pubblicati%20su%20Euclide/Castelnuovo%20Guido%20-%20La%20scuola%20nei%20suoi%20rapporti%20colla%20vita%20e%20colla%20Scienza%20moderna.pdf>>

Chaitin, Gregory, “Irreducible Complexity in Pure Mathematics”, *Enriques lecture*, proferida em 30 de Outubro de 2006, na Universidade de Milão.

<http://thalesandfriends.org/en/papers/pdf/chaitin_paper.pdf?phpMyAdmin=rcOunTMVHvdSvjLzdNr45lZ-X09>

Corry, Leo, “Calculating the Limits of Poetic License: Fictional Narrative and the History of Mathematics”, Leo Corry, a publicar em *Configurations 15.3*, jornal oficial da Society for Arts, Literature and Science, 2009.

Dauben, Joseph W., “Georg Cantor and Pope Leo XIII: Mathematics, Theology, and the Infinite”, *Journal of the History of Ideas* 38 (1), 1977, pp. 91–93.

Doxiadis, Apostolos, “Euclid’s Poetics - An examination of the similarity between narrative and proof”, apresentação realizada na conferência *Matemática e Cultura*, Veneza, Abril 2001.

<http://www.apostolosdoxiadis.com/en/index.php?option=com_content&view=article&id=225:euclid-s-poetics-an-examination-of-the-similarity-between-narrative-and-proof&catid=62:essays&Itemid=124>

Doxiadis, Apostolos, “Embedding mathematics in the soul: narrative as a force in mathematics education“, abertura da 3ª Conferência Mediterrânica de Educação Matemática, Atenas, 3 de Janeiro de 2003.

<http://www.apostolosdoxiadis.com/en/index.php?option=com_content&view=article&id=224:embedding-mathematics-in-the-soul-narrative-as-a-force-in-mathematics-education&catid=62:essays&Itemid=124>

Doxiadis, Apostolos, “The mathematical logic of narrative”, artigo a ser publicado na colecção *Matemática e Cultura na Europa*, Mirella Manaresi (ed.), Springer Verlag.

<http://www.apostolosdoxiadis.com/en/index.php?option=com_content&view=article&id=228:the-mathematical-logic-of-narrative&catid=62:essays&Itemid=124>

Friedman, Michael, “Kant on Geometry and Spatial Intuition”, *Synthese* 186 (1), 2012, pp. 231-255.

Friedman, Michael, “Kant’s Theory of Geometry”, *Philosophical Review* 94 (4), 1985, pp. 455-506.

Ginsburg, H. P.; Posner, J. K.; Russell, R.L. “The development of mental addition as a function of schooling and culture”, *Journal of Cross-Cultural Psychology*, 12, 2, 1981, 163 – 178.

Grattan-Guinness, Ivor, “Review: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times by Morris Kline”, *Science*, New Series 180 (4086), 1973, pp. 627-628.

Hilbert, David, “Natur und Mathematisches Erkennen: Vorlesungen”, realizado em 1919-1920, em Gotinga. (Org.) Paul Bernays (Editado e com uma introdução inglesa por David E. Rowe), Birkhauser, 1992, citado em <http://en.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert#cite_ref-34>, em 21 de Agosto de 2014.

Hinttinka, Jaako, “III. Kantian Intuitions.”, *Inquiry* 15 (1-4), 1972, pp. 341-345; “Russell, Kant, and Coffa”, *Synthese* 46 (2), 1981, pp. 265-270.

Hinttinka, Jaako, “Kant’s Theory of Mathematics Revisited”, *Philosophical Topics* 12 (2), 1981, pp. 201-215.

Hinttinka, Jaako, “Kant's Transcendental Method and His Theory of Mathematics”, *Topoi* 3 (2), 1984, pp. 99-108.

Hintikka, J., “Kant's new method of thought and his theory of mathematics”, *Knowledge and the Known, Modern Essays*, Reidel, 1965, p.130.

Kline, Morris, “Mathematical texts and teachers: a tirade”, *The Mathematics Teacher*, nº 49, 1956, p. 171.

Kline, Morris, “A Proposal for the High School Mathematics Curriculum”, Morris Kline, *The Mathematics Teacher*, volume 59, nº 4, 1966, p. 324.

Koehler, D. O., “Mathematics and Literature”, *Mathematics Magazine*, vol.55, nº 2, Março de 1982.

Lipsey, Sally I.; Pasternack, Bernard S., “Mathematics in Literature”, Conferência *The Humanistic Renaissance in Mathematics Education*, Palermo, 2002.

<<http://math.unipa.it/~grim/SiLipsey.PDF>>

O'Neill, Daniela; Pearce, Michelle, Pick, Jennifer, “Preschool children's narratives and performance on the Peabody Individualized Achievement Test – Revised: Evidence of a relation between early narrative and later mathematical ability”, *First Language*, Vol 24(2), Sage Publications, 2004.

Ortega y Gasset, “Sobre o estudar e o estudante”, in *Hannah Arendt, Eric Weil, Bertrand Russell, Ortega y Gasset, Quatro Textos Excêntricos*, Olga Pombo (org.), Lisboa: Relógio d'Água, 2000, pp. 87-103.

<<http://www.tau.ac.il/~corry/publications/articles/Narrative/main.html>>

Ponte, João Pedro, “O ensino da matemática em Portugal: Uma prioridade educativa?”, 15 de Abril de 2011, <[http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/02-Ponte\(CNE\).pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/02-Ponte(CNE).pdf)>, em 8 de Abril de 2014.

Pramling, Niklas; Samuelsson, Ingrid Pramling, “Identifying and Solving Problems: Making Sense of Basic Mathematics in the preschool Class”, *Internacional Journal of Early Childhood*, Volume 40, Number 1, 65-79, DOI: 10.1007/BF03168364.

<<https://springerlink3.metapress.com/content/b353946h07k6t0x6/resource-secured/?target=fulltext.pdf&sid=ljpx4dcjib0nmfmislusxmfv&sh=www.springerlink.com>>

Ricoeur, Paul “Narrative Time”, *Critical Inquiry*, 7, 1, 1980.

Searle, John R., “Is the Brain a Digital Computer?”, *Proceedings and Addresses of the American Philosophical Association*, 64 (November), 1990, pp. 21-37.

Vygotsky, Lev, “Play and its Role in the Mental Development of the Child”,

<<https://www.marxists.org/archive/vygotsky/works/1933/play.htm>>, em 4 de Julho de 2014.

Wang, Hao, “On Formalization”, *Mind* 64 (nova série): 226-228, 1955.

Wynn, K., “Addition and subtraction by human infants”, *Nature*, 358, 6389, 1992, pp. 749 – 750.

Thales and Friends

Barrow, John D., “Where Things Happen That Don’t: Staging the Infinite”, proc. Mykonos conference, Mathematics and Narrative, ed. A. Alexander et al., 2005.

<http://thalesandfriends.org/en/papers/pdf/barrow_paper.pdf?phpMyAdmin=rcOunTMVHvdSvjLzdNr45lZ-X09>

Corfield, David, “How Mathematicians May Fail To Be Fully Rational”, David Corfield, proc. Mykonos conference, Mathematics and Narrative, ed. A. Alexander et al., 2005.

<http://thalesandfriends.org/en/papers/pdf/corfield_paper.pdf?phpMyAdmin=rcOunTMVHvdSvjLzdNr45lZ-X09>

Davis, Martin, “Mathematics and Biography”, Martin Davis, proc. Mykonos conference, Mathematics and Narrative, ed. A. Alexander et al., 2005.

<http://thalesandfriends.org/en/papers/pdf/davis_paper.pdf?phpMyAdmin=rcOunTMVHvdSvjLzdNr45lZ-X09>

Goldstein, Rebecca, “Mathematics and the Character of Tragedy”, proc. Mykonos conference, Mathematics and Narrative, ed. A. Alexander et al., 2005.

<http://thalesandfriends.org/en/papers/pdf/goldstein_paper.pdf?phpMyAdmin=rcOunTMVHvdSvjLzdNr45lZ-X09>

Mazur, Barry, ““Eureka” and Other Stories”, proc. Mykonos conference, Mathematics and Narrative, ed. A. Alexander et al., 2005.

<http://thalesandfriends.org/en/papers/pdf/mazur_paper.pdf?phpMyAdmin=rcOunTMVHvdSvjLzdNr45lZ-X09>

Oliver, Barbara, “Mathematics and Narrative – A Happening “, proc. Mykonos conference, Mathematics and Narrative, ed. A. Alexander et al., 2005.

<http://thalesandfriends.org/en/papers/pdf/oliver_paper.pdf?phpMyAdmin=rcOunTMVHvdSvjLzdNr45lZ-X09>

Paulos, John Allen, “A Mathematician Explores the Gap Between Stories and Statistics, Logic and Language”, proc. Mykonos conference, Mathematics and Narrative, ed. A. Alexander et al., 2005.

<http://thalesandfriends.org/en/papers/pdf/paulos_paper.pdf?phpMyAdmin=rcOunTMVHvdSvjLzdNr45lZ-X09>

Rotman, Brian, “Gesture in the Head: Mathematics and Mobility “, proc. Mykonos conference, Mathematics and Narrative, ed. A. Alexander et al., 2005.

<http://thalesandfriends.org/en/papers/pdf/rotman_paper.pdf?phpMyAdmin=rcOunTMVHvdSvjLzdNr45lZ-X09>

Turner, Mark, “Mathematics and Narrative”, proc. Mykonos conference, Mathematics and Narrative, ed. A. Alexander et al., 2005.

<http://thalesandfriends.org/en/papers/pdf/turner_paper.pdf?phpMyAdmin=rcOunTMVHvdSvjLzdNr45lZ-X09>

Zizzi, Paola, “Poetry of a Logical Truth”, proc. Mykonos conference, Mathematics and Narrative, ed. A. Alexander et al., 2005.

<http://thalesandfriends.org/en/papers/pdf/zizzi_paper.pdf?phpMyAdmin=rcOunTMVHvdSvjLzdNr45lZ-X09>

Fragmentos Bibliográficos

Carta de Temesvár (Timisoara) de János Bolyai para Farkas Bolyai, 3 de Novembro de 1823, Setembro 2013, <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Extras/Bolyai_letter.html>

Goethe, Johann Wolfgang Von, *Das Sonett*,

< <http://www.sonett-archiv.com/gh/Goethe/sonett.HTM> > , soneto de 1800, visto em 21 de Agosto de 2014.

Goethe, Johann Wolfgang Von, *Fausto*, Acto 1, Cena 3, linha 1410,

<<http://www.poetryintranslation.com/PITBR/German/FaustI/ScenesItoIII.htm>> em 21 de agosto de 2014.

Shakespeare, William, *As You Like It*, Act II, Scene 7,

<<http://shakespeare.mit.edu/asyoulikeit/full.html>>

Borel, Armand, “Twenty five years with Bourbaki”,

<<http://www.ega-math.narod.ru/Bbaki/Bourb3.htm>>, em 8 de Abril de 2014.

Laplace, Pierre Simon, *Essai philosophique sur les probabilités*, Courcier, 1814.

<<http://eudml.org/doc/203193>>

Whitman, Walt, *When I Heard the Learn'd Astronomer*,

<<http://www.poetryfoundation.org/poem/174747>>, em 30 de Junho de 2014.

Bibliografia Primária

Carvalho, Rómulo de, *Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal*, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 5, nº292, manuscrito não publicado, Lisboa.

Carvalho, Rómulo de, *Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal*, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 49, nº2322, manuscrito não publicado, Lisboa.

Carvalho, Rómulo de, *Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal*, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 2, nº107, manuscrito não publicado, Lisboa.

Alves, Maria Teodora, *Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal*, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 14, nº 779, manuscrito não publicado, Lisboa.

Alves, Maria Teodora, *Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal*, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 17, nº630, manuscrito não publicado, Lisboa.

Alves, Maria Teodora, *Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal*, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 17, nº937, manuscrito não publicado, Lisboa.

Alves, Maria Teodora, *Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal*, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 19, nº1133, manuscrito não publicado, Lisboa.

Alves, Maria Teodora, *Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal*, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 23, nº1304, manuscrito não publicado, Lisboa.

Alves, Maria Teodora, *Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal*, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 26, nº1437, manuscrito não publicado, Lisboa.

Alves, Maria Teodora, *Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal*, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 29, nº1574, manuscrito não publicado, Lisboa.

Alves, Maria Teodora, *Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal*, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 33, nº1756, manuscrito não publicado, Lisboa.

Alemão, J. *Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal*, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 19, nº 1108, manuscrito não publicado, Lisboa.

Barroco, M. E., *Relatório para a Inspeção do Ensino Liceal*, Arquivo Histórico do Ministério da Educação, caixa 5, nº 312, manuscrito não publicado, Lisboa.

“O laureado do Prémio “Dr. Gomes Teixeira” fala das deficiências do ensino da Matemática em Portugal”; *Diário de Lisboa*; 24/12/1945; 2 p.; cópia; Biblioteca Nacional; Sala 2.36, Dossier II, nº36.

Gazeta de Matemática, nº 1-136, Lisboa: Editora Sá da Costa, 1940-1976.

Averróis

Abu l-Walid Muhammad Ibn Ahmad Ibn Rusd

O matemático que levou Córdova à ruína



Há centenas de anos atrás, no califado Almoada, na atual cidade espanhola de Córdova, vivia um califa de grande riqueza,

**Abu Yussuf Ya'qub bin
Yussuf al-Mansur**



Um dia, ao passear na floresta, perto do seu palácio, o Califa Al-Mansur foi assaltado por um bando de ladrões. Um homem destemido, que ali passava, salvou-o. O seu nome era Averróis...



- Alá esteja contigo, meu Senhor! Que sorte eu aqui estar...



- Ficarei eternamente grato! Deixa-me oferecer-te comida e dormida...



- Seria uma honra e já me faz falta o descanso. A viagem já vai longa...

Regressaram ao palácio. O Califa Al-Mansur ordenou que se fizesse um grande banquete, em honra de Averróis...



- Muito bem, assim seja feito. E que quantidade desejas?



- Gostaria que me desses, pela primeira casa, 1 arrátel¹ de arroz. Na segunda, 2 arráteis de arroz, na terceira, 4 arráteis de arroz, e assim por diante, seguindo a **ordem** que estabeleci...

¹ Um arrátel oscilava entre 350 e 400 gramas.

Na manhã seguinte, o Califa Al-Mansur, ainda grato a Averróis, propôs-lhe:



- Como recompensa pelo teu feito, pede o que quiseres. Serei generoso contigo.



- Caro Senhor, não irei abusar de si. O meu pedido será muito singelo. Num tabuleiro quadrado, com 32 casas brancas e 32 casas pretas, em **sequência**, quero apenas arroz.





- Tens a certeza do que me pedes? Parece-me que não vais ganhar grande coisa...



- Se me deres os números ou termos de arráteis de arroz que te pedi, ficarei satisfeito.



- Darei ordem imediata que te seja dado o que me pedes...

Após algumas horas, o Vizir do Califa informou-o que se tinham esgotado os arráteis de arroz em Córdova...



- Compra nas cidades próximas o arroz que puderes... Não quero ficar mal aos olhos de quem me ajudou...

E foi assim que o Califa foi arruinado... Sabes explicar como? Quantos arráteis de arroz teria de pagar a Averróis pela última casa do tabuleiro?

A quantos quilos de arroz corresponderia? (Considera um arrátel o equivalente a 400 gramas).

Em que casa conseguiria uma tonelada de arroz?

Será possível encontrar uma fórmula que nos permita calcular o número de arráteis de cada quadrado, sem necessitarmos de determinar o número de arráteis dos quadrados anteriores?

Abu Yussuf Ya'qub bin Yussuf al-Mansur
(o vitorioso)
(1160-1199)

Al-Mansur foi o terceiro califa do Califado Almóada de Marrocos. Subiu ao trono do império em 1184, aquando da morte do seu pai, após a derrota na batalha de Santarém, frente a Fernando II de Leão, deixando o seu irmão, Abu Yahya, como governador dos territórios da Península Ibérica (Al-Andalus). O seu reinado coincidiu com o período de máximo esplendor do Califado Almóada na Península Ibérica.

Abu al-Walid Muhammad ibn Ahmad ibn Muhammad
ibn Rushd
(1126 — 1198)

- Foi um filósofo, médico e sábio muçulmano andaluz, conhecido pelo nome de Averróis. Estudou medicina e filosofia, bem como astronomia. Averróis teve o favor e a proteção dos califas de Espanha, até que foi desterrado por al-Mansur, que considerou as opiniões do filósofo desrespeitosas e em desacordo com o Corão.

Anexo 2

Protocolo de aplicação dos instrumentos de recolha de informação

O questionário que vão preencher foi construído para tentar perceber se uma aula na qual a matéria é ensinada com recurso a uma história ficcionada (como aquela em que participaram) pode constituir uma ajuda na vossa aprendizagem, em alternativa a uma aula tradicional (de exercícios, expositiva, etc.). Pretende-se também perceber o que cada um de vocês conseguiu aprender no final.

Nas primeiras duas questões, serão confrontados com uma afirmação que estará dentro de uma caixa:

A aula de matemática foi:					
---------------------------	--	--	--	--	--

Sem utilidade	1	2	3	4	Útil
Desagradável	1	2	3	4	Agradável
Pouco Apelativa	1	2	3	4	Muito Apelativa
Pouco Clara	1	2	3	4	Esclarecedora

Em cada afirmação terão de escolher se, no vosso caso, se aproximaram mais da sensação da esquerda ou da direita e quanto, optando por um número de **1** (mais à esquerda) a **4** (mais à direita), para cada um dos 4 aspectos abordados (grau de utilidade; capacidade de despertar gosto; capacidade de despertar a atenção e o interesse; clareza).

Nas 12 questões seguintes são apresentadas diversas frases. Para cada uma delas apresenta-se a seguinte escala:

Discordo totalmente 1 2 3 4 Concordo totalmente

O **1** corresponde a discordo totalmente, o **4** a concordo totalmente. **2** e **3** correspondem a uma posição intermédia.

O questionário não é um teste. Por isso não existem respostas certas ou erradas. Não respondam sem reflectir. Procurem responder a primeira coisa em que pensaram.

Questionário

A aula de matemática foi:					
---------------------------	--	--	--	--	--

Sem utilidade	1	2	3	4	Útil
Desagradável	1	2	3	4	Agradável
Pouco Apelativa	1	2	3	4	Muito Apelativa
Pouco Clara	1	2	3	4	Esclarecedora

As aulas de matemática habituais são:					
---------------------------------------	--	--	--	--	--

Sem utilidade	1	2	3	4	Útil
Desagradável	1	2	3	4	Agradável
Pouco Apelativa	1	2	3	4	Muito Apelativa
Pouco Clara	1	2	3	4	Esclarecedora

Compreensão das ideias

1. Compreendeste o que é uma **sequência** de números.

Discordo totalmente 1 2 3 4 Concordo totalmente

2. Compreendeste o que é a **ordem** de uma sequência de números.

Discordo totalmente 1 2 3 4 Concordo totalmente

3. Compreendeste o que é um **termo** de uma sequência de números.

Discordo totalmente 1 2 3 4 Concordo totalmente

4. Compreendeste o que é a **recorrência** de uma sequência.

Discordo totalmente 1 2 3 4 Concordo totalmente

5. Compreendeste que **uma** sequência tem uma regra própria.

Discordo totalmente 1 2 3 4 Concordo totalmente

6. Compreendeste que **cada** sequência tem uma regra própria.

Discordo totalmente 1 2 3 4 Concordo totalmente

7. Compreendeste que **existe uma fórmula** que permite determinar qualquer número de uma sequência, **sem necessitar de saber os anteriores**.

Discordo totalmente 1 2 3 4 Concordo totalmente

Caracterização dos alunos

8. Gostas de matemática.

Discordo totalmente	1	2	3	4	Concordo totalmente
---------------------	---	---	---	---	---------------------

9. Tens bons resultados a matemática.

Discordo totalmente	1	2	3	4	Concordo totalmente
---------------------	---	---	---	---	---------------------

10. Tens hábitos de leitura.

Discordo totalmente	1	2	3	4	Concordo totalmente
---------------------	---	---	---	---	---------------------


11. Gostas de lendas e outras histórias.

Discordo totalmente	1	2	3	4	Concordo totalmente
---------------------	---	---	---	---	---------------------

12. És atento e concentrado.

Discordo totalmente	1	2	3	4	Concordo totalmente
---------------------	---	---	---	---	---------------------

Anexo 3

	<p><i>Escola Secundária de Bocage</i></p> <p><i>Disciplina: Matemática</i></p>	Ano lectivo 2014-2015
		Professor Heitor Matos
		Questão-aula
		7º ano Turma:
Nome:	Nº:	Data:
Encarregado de Educação:		Classificação:

Atenção: Antes de responderes, lê atentamente as questões. Responde de forma clara e completa. Dá boa apresentação às resoluções.

1. Em cada sequência numérica, refere a **lei de formação** e determina o termo que falta.

a) 1, 8, 15, 22, 29,;

Resposta: _____

b) 5, 1, -3,, -11;

Resposta: _____

c), -5, 10, -20, 40 .

Resposta: _____

d) Determina os termos gerais de cada uma das sequências.

2. Quando o despertador toca, o Pedro pressiona o botão **REPETIR**. O despertador desliga-se, voltando a **tocar passados 7 minutos**. Este processo repete-se até o Pedro desligar definitivamente no despertador. Habitualmente o Pedro programa o **despertador para as 7h**.



2.1 Na manhã de uma 4.ª feira, o Pedro desligou o despertador **quatro** vezes. Regista todas as horas a que o despertador tocou.

Resposta: _____

2.2 Se o Pedro desligar definitivamente o despertador ao **nono toque**, a que horas se levanta?

Resposta: _____

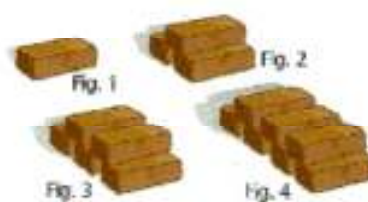
2.3 Hoje o Pedro atrasou-se e só se levantou às 8h31 minutos. Sabendo que o Pedro pressionou o botão **REPETIR** cada vez que ouvia o toque, quantas vezes tocou o despertador?

Resposta: _____

3. Observa as quatro primeiras figuras de uma sequência de tijolos.

3.1 Quantos tijolos terá a 6.^a figura? **Justifica.**

Resposta:



3.2 Quantos tijolos serão necessários para construir a 14.^a figura?

Resposta: _____

Para construir as 9 primeiras figuras, quantos tijolos são gastos no total?

Resposta: _____

Indica o termo geral da sequência.

Resposta: _____

4. Escreve os cinco primeiros termos de uma sequência dada pelo termo geral:

4.1 $3n-3$

4.2 $n-1$

Resposta: _____

Resposta: _____

1 a)	1 b)	1 c)	1 d)	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	3.3	3.4	4.1	4.2	Total
7	7	7	12	7	7	7	7	9	7	9	7	7	100